Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 7. Zagadnienia stateczności

11.2024

Utrata stateczności. Obciążenia krytyczne

- Stateczność stanu równowagi można najogólniej zdefiniować jako odporność na małe zaburzenia.

1. *Jeśli po bardzo małym odchyleniu od stanu równowagi obciążona konstrukcja wraca do konfiguracji wyjściowej, to o układzie mówimy że jest statyczny (stabilny) - znajduje się w stanie równowagi trwałej.*
2. *Jeżeli nawet najmniejsze zaburzenie powoduje ruch układu i gwałtowną zmianę konfiguracji mówimy że układ jest niestabilny.*

- O tym czy w stanie równowagi układ odkształcalny jest stabilny czy nie, decyduje zazwyczaj wielkość obciążenia. *Obciążenie, przy którym konstrukcja może przejść ze stanu stabilnego do niestabilnego, nazywane jest obciążeniem krytycznym, a stan układu przy takim obciążeniu nazywamy stanem równowagi obojętnej lub równowagi krytycznej.*

- Analiza stateczności poprzez obliczenia uwzględniające w pełni zmiany konfiguracji układu zachodzące ze wzrostem obciążenia jest trudna, pracochłonna i może być przeprowadzona, zwykle numerycznie, tylko dla mniej złożonych przypadków. *Z tego powodu w praktyce często przyjmuje się pewne założenia upraszczające i badanie stateczności sprowadzone jest do zagadnienia na wartości własne, z którego można wyznaczyć obciążenia krytyczne.*

Kryterium energetyczne badania stateczności

- Stateczność konstrukcji sprężystej możemy badać oceniając zmiany całkowitej energii potencjalnej ΔV wywołane przez bardzo małe odchylenie od stanu równowagi.

➢ Jeśli $\Delta V > 0$, to odchylenie od stanu równowagi wymaga dostarczenia energii, a więc istnienia dodatkowych oddziaływań zewnętrznych *(analizowany stan jest stanem równowagi trwałej).*

➢ Jeśli $\Delta V < 0$, to dowolnie małe odchylenie od stanu równowagi wywołuje oddawanie energii, co w rzeczywistości przejawia się w ruchu układu i przejściu w położenie różne od pierwotnego *(stan równowagi nietrwałej).*

➢ Jeśli $\Delta V = 0$, to układ może pozostać w położeniu pierwotnym lub przejść do nowego położenia równowagi *(układ pozostaje w stanie równowagi obojętnej - krytycznej).*

Całkowity przyrost energii potencjalnej układu odkształcalnego wywołany małą zmianą *(wariacją)* pola przemieszczeń można przedstawić jako:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots$$

*pierwsza wariacja **V***

*druga wariacja **V***

*trzecia wariacja **V***

(Podobne do rozwinięcia w szereg Taylora)

$$\Delta f = f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2!}f''(x)dx^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)dx^3 + \cdots$$

- Warunek $\boldsymbol{\delta V = 0}$ jest warunkiem koniecznym równowagi!

Aby jednak ocenić rodzaj badanego stanu równowagi, należy zbadać znak ΔV.

- Podstawowe kryterium energetyczne badania stateczności, tzw. kryterium Lagrange'a-Dirichleta, ograniczа się do badania drugiej wariacji:

(Energetyczna metoda badania stateczności)

przy $\delta^2 V > 0$ – równowaga trwała,
przy $\delta^2 V < 0$ – równowaga nietrwała,
przy $\delta^2 V = 0$ – stan równowagi krytycznej (obojętnej).

- W metodzie elementów skończonych całkowita energia potencjalna układu staje się po dyskretyzacji funkcją przemieszczeń węzłowych $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$.
- Przyrost energii ΔV odpowiadający zaburzeniu $d\{q\} = \lfloor dq_1, dq_2, \dots, dq_n \rfloor$ możemy przedstawić w postaci:

$$\Delta V = \sum_i^n \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} dq_i\, dq_j$$

Zgodnie z kryterium Lagrange'a-Dirichleta ograniczymy się do uwzględnienia pierwszych i drugich pochodnych V. Zapisując w postaci macierzowej:

$$\Delta V = \underbrace{\left\lfloor \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right\rfloor \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}} + \underbrace{\frac{1}{2} \lfloor dq_1, \dots, dq_n \rfloor \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_i} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}$$

Zerowanie się pierwszego członu równania jest więc warunkiem koniecznym równowagi ustroju,
a z równowagą krytyczną mamy do czynienia, gdy dodatkowo drugi człon równania jest równy zero.

$$\Delta V = \underbrace{\left\lfloor \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right\rfloor \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}} + \underbrace{\frac{1}{2} \lfloor dq_1, \dots, dq_n \rfloor \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_i} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}$$

Zerowanie się pierwszego członu równania jest więc warunkiem koniecznym równowagi ustroju,
a z równowagą krytyczną mamy do czynienia, gdy dodatkowo drugi człon równania jest równy zero.

W efekcie warunkiem równowagi krytycznej jest układ równań

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right] \{dq\} = \{0\}$$

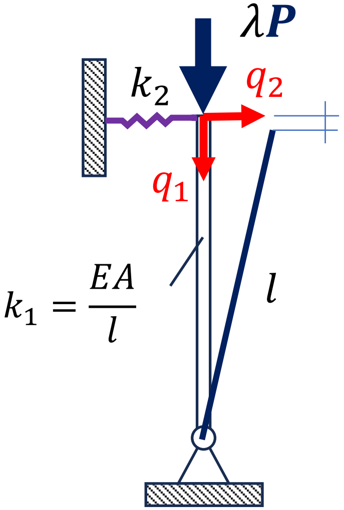
- Przyjmujemy zwykle, że mamy do czynienia z obciążeniem jednoparametrowym, które jest określone przez założony rozkład sił zewnętrznych i nieustalony skalarny mnożnik λ_* .

Wówczas energia potencjalna V uzależniona jest od wartości parametru λ_*.
Rozwiązanie sprowadza się do warunku:

$$det \left[\frac{\partial^2 V(\lambda_*)}{\partial q_i \partial q_j} \right] = \{0\}$$

- Podobnie jak w analizie drganie własnych, każdej wartości λ_* odpowiada wektor $\{dq\}_i$, który opisuje kształt deformacji przy utracie stateczności.

Przykład 1 Pręt nieskończenie sztywny na zginanie i sprężysty przy ściskaniu + sprężynka



$$\Delta = l(1 - cos\alpha) \cong \frac{{q_2}^2}{2l}$$

Energię potencjalną tego pręta możemy wyrazić wzorem:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k_1 q_1^2 + \frac{1}{2}k_2 q_2^2 - \lambda_* P q_1 - \lambda_* P\,\frac{{q_2}^2}{2l}}$$

Badamy przyrost ΔV odpowiadający zmianie całkowitej energii potencjalnej przy zaburzeniu $\{dq\}$:

$$\Delta V = \left\lfloor \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right\rfloor \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \lfloor dq_1, \ldots, dq_n \rfloor \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_i} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}$$

$$\Delta V = \left\lfloor \underbrace{k_1 q_1 - \lambda_* P}_{=0},\; \underbrace{k_2 q_2 - \lambda_* \frac{P}{l} q_2}_{=0} \right\rfloor \begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \lfloor dq_1, dq_2 \rfloor \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda_* \frac{P}{l} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{Bmatrix}$$

w stanie równowagi

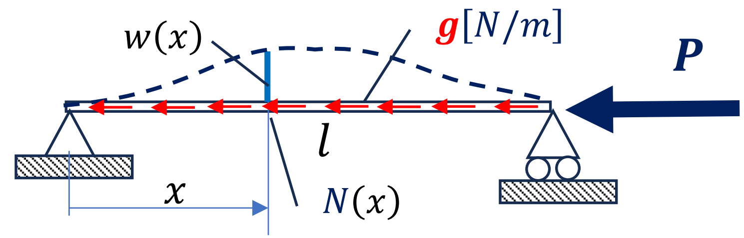
$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= {}^{\lambda_* P}/_{k_1} \\ q_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$$det \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda_* \frac{P}{l} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\lambda_* P = k_2 l}$$

Dla takiej wartości obciążenia ustrój przechodzi w stan krytyczny

Analiza MES wyboczenia prętów ściskanych



Ściskany pręt znajduje się w stanie równowagi:

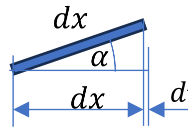
$$\Delta V = \overbrace{\delta V}^{=0} + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots$$

W celu określenia warunków stanu krytycznego należy zbadać nieliniową część przyrostu ΔV, która wiąże się w przypadku ściskania prętów z zaburzeniem osiowości (zginaniem).

Niech $\boldsymbol{w}_*$ - bardzo małe zaburzenie ugięcie pręta

(W celu uproszczenia zapisu często przyjmuje się oznaczenie $\boldsymbol{q_i}$ zamiast $\boldsymbol{dq_i}$)

Wskutek ugięcia przekroje każdego elementu pręta o długości dx zbliżą się mierząc wzdłuż osi pręta o odległość du .



$$du = dx(1 - cos\alpha) \cong \frac{(w_*')^2}{2} dx$$

Praca obciążeń zewnętrznych na przemieszczeniach będących efektem zaburzenia:

$$\Delta W_z = \int_0^l \underbrace{\lambda\, N_*(x)}_{\text{siła normalna w przekroju}} \frac{(w_*')^2}{2} dx$$

Przyrost energii potencjalnej odkształcenia wiąże się z deformacją zgięciową:

$$\Delta U = \int_0^l EI \frac{(w_*'')^2}{2} dx$$

Przyrost całkowitej energii potencjalnej wywołane zaburzeniem w_* jest równy:

$$\Delta V = \Delta U - \Delta W_z = \frac{1}{2}\int_0^l EI(w_*'')^2 dx - \frac{\lambda_*}{2}\int_0^l N_*(x)\,(w_*')^2 dx$$

W każdym elemencie skończonym ugięcie w_* możemy przedstawić za pomocą funkcji kształtu dla elementu belki.

$$w_*(\xi) = \lfloor N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi) \rfloor \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$$

$$w'_*(\xi) = \lfloor N'_1(\xi), N'_2(\xi), N'_3(\xi), N'_4(\xi) \rfloor \{q\}_e$$

$$w''_*(\xi) = \lfloor N''_1(\xi), N''_2(\xi), N''_3(\xi), N''_4(\xi) \rfloor \{q\}_e$$

$$N_1(\xi) = 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3},$$
$$N_2(\xi) = \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2},$$
$$N_3(\xi) = 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3},$$
$$N_4(\xi) = \frac{-\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}.$$

Zmianę całkowitej energii potencjalnej ΔV_e w elemencie skończonym o długości l_e można więc przedstawić jako:

$$\Delta V_e = \frac{EI}{2} \lfloor q \rfloor_e \int_0^{l_e} \{N''\} \lfloor N'' \rfloor d\xi \{q\}_e - \frac{\lambda_*}{2} \lfloor q \rfloor_e \int_0^{l} N_*(x) \{N'\} \lfloor N' \rfloor d\xi \{q\}_e$$

Otrzymamy stąd

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \lfloor q \rfloor_e [k]_e \{q\}_e - \frac{\lambda_*}{2} \lfloor q \rfloor_e [k_\sigma]_e \{q\}_e$$

$$\boxed{\Delta V_e = \frac{1}{2} \lfloor q \rfloor_e ([k]_e - \lambda_* [k_\sigma]_e) \{q\}_e}$$

Macierz sztywności elementu belkowego:

$$[k]_e = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

Jeśli siła normalna w przekroju jest stała i ma wartość jednostkową $N_*(\xi) = 1$ możemy wyliczyć:

Macierz sztywności geometrycznej elementu belkowego:

$$[k_\sigma]_e = \frac{1}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

Jeśli siła w elemencie skończonym zmienia się liniowo od zera do wartości jednostkowej: $N_*(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e}$:

Macierz sztywności geometrycznej elementu belkowego:

$$[k_\sigma]_e = \frac{1}{60l_e} \begin{bmatrix} 30 & 0 & -36 & 6l_e \\ 3l_e & 6l_e^2 & 0 & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -6l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

W modelu MES składającym się z wielu elementów skończonych obliczamy zmianę energii ΔV całego układu, która jest sumą przyrostów energii ΔV_e wszystkich elementów przy małym zaburzeniu stanu równowagi:

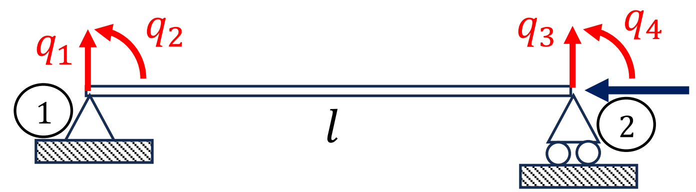
$$\boxed{\Delta V = \frac{1}{2}\lfloor q \rfloor([K] - \lambda_*[K_\sigma])\{q\}}$$

Macierz zależy od sił wewnętrznych, które powinny być wcześniej obliczone dla liniowego zadania statyki z podanym obciążeniem.
Otrzymujemy ostatecznie uogólnione zadanie na wartości własne:

$$\boxed{([K] - \lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0}$$

- Wartości własne określają mnożnik skalarny λ_* , który mówi, ile razy większe powinno być obciążenie od wstępnie założonego żeby konstrukcja znalazła się w stanie równowagi krytycznej.
- Odpowiednie wektory własne $\{q\}_i$ definiują kształt deformacji dla kolejnych obciążeń krytycznych.
- Podobnie jak w analizie drgań własnych, wektory własne wyznaczane są z dokładnością do stałego mnożnika i nie dają informacji o skali deformacji.

Przykład 2 Obliczyć za pomocą najprostszego modelu MES siłę krytyczną dla pręta obciążonego jedynie stałą siłą ściskającą



Rozwiązanie: $([K]-\lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0$

$$\left(\frac{2EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2l^2 & -3l & l^2 \\ & & 6 & -3l \\ & & & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_*}{30l}\begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$P_i^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(l/i\right)^2}$$

$$P_1^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9.8696 \cdot EI}{l^2}$$

$$P_2^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(l/2\right)^2} = \frac{39.4784 \cdot EI}{l^2}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\left(\begin{bmatrix} 2l^2 & l^2 \\ l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_* l^2}{60EI}\begin{bmatrix} 4l^2 & -l^2 \\ -l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiamy: $\lambda = \dfrac{\lambda_* l^2}{60EI}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 2-4\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 2-4\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

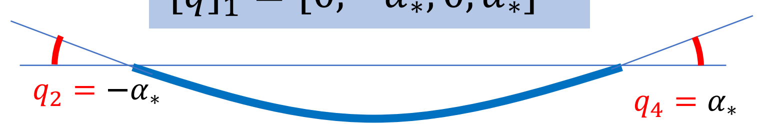
Równanie charakterystyczne:

$$(2-4\lambda)^2 - (1+\lambda)^2 = 15\lambda^2 - 18\lambda + 3 = 0$$

pierwiastki: $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{5} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \lambda_1^* = \dfrac{12EI}{l^2} \\ \lambda_2^* = \dfrac{60EI}{l^2} \end{cases}$ $\xrightarrow{q_4 = \alpha_*}$

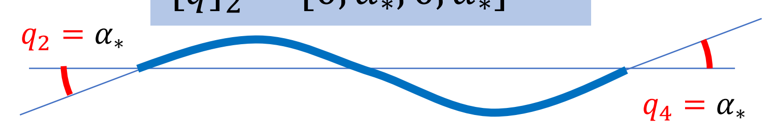
1 r-nie: $\left(2-4\cdot\frac{1}{5}\right) q_2 + \left(1+\frac{1}{5}\right) q_4 = 0 \rightarrow 1.2\, q_2 + 1.2 q_4 = 0$

$$\lfloor q \rfloor_1 = \lfloor 0, -\alpha_*, 0, \alpha_* \rfloor$$

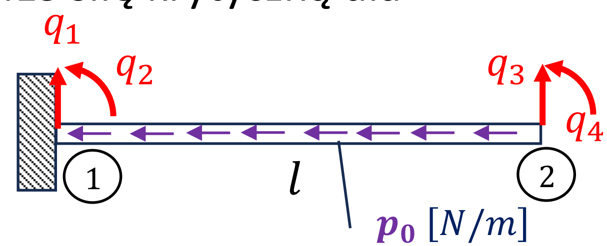


1 r-nie: $(2-4\cdot 1)\, q_2 + (1+1)\, q_4 = 0 \rightarrow$ -2 $q_2 + 2q_4 = 0$

$$\lfloor q \rfloor_2 = \lfloor 0, \alpha_*, 0, \alpha_* \rfloor$$



Przykład 3 Obliczyć za pomocą najprostszego modelu MES siłę krytyczną dla pręta utwierdzonego i obciążonego wydatkiem sił $\boldsymbol{p_0}$



Rozwiązanie: $([K]-\lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\left(\frac{2EJ}{l^3}\begin{bmatrix}6 & -3l\\ -3l & 2l^2\end{bmatrix}-\frac{\lambda_*}{60l}\begin{bmatrix}36 & -6l\\ -6l & 2l^2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

podstawiamy: $\lambda=\dfrac{\lambda_* l^2}{120EI}$

$$\begin{bmatrix}6-36\lambda & -3l+6l\lambda\\ -3l+6l\lambda & 2l^2-2l^2\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne: $36\lambda^2-48\lambda+3=0$

pierwiastki:

$\lambda_1=0{,}06574$

$\lambda_2=1{,}268$

$\lambda_*=\dfrac{\lambda\cdot 120EI}{l^2}$

$\lambda_1^*=7.89\dfrac{EI}{l^2}$

$\lambda_2^*=152\dfrac{EI}{l^2}$

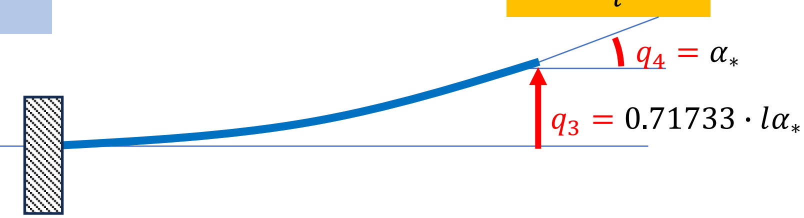
Obciążenie krytyczne:

$\boldsymbol{p_0}_*=\lambda_1^*\dfrac{1}{l}=7.89\dfrac{EI}{l^3}$

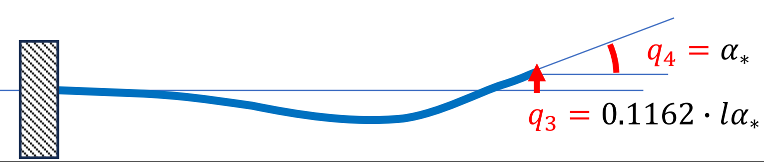
Rozwiązanie analityczne: $7.837\dfrac{EI}{l^3}$

$q_4=\alpha_*$

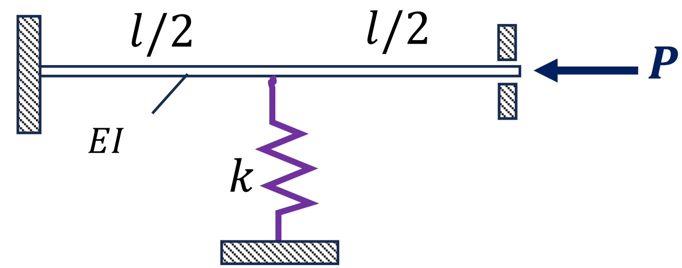
$\lfloor q\rfloor_1=\lfloor 0{,}0, 0.71733\cdot l\alpha_*, \alpha_*\rfloor$



$\lfloor q\rfloor_2=\lfloor 0{,}0, 0.1162\cdot l\alpha_*, \alpha_*\rfloor$



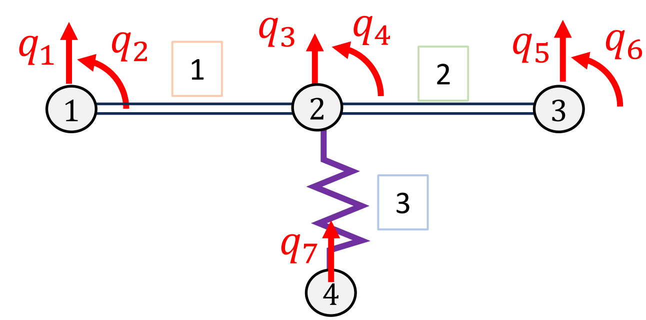
Przykład 4 Wyznaczyć siłę krytyczną i odpowiednią postać utraty stateczności dla ustroju przedstawionego na rysunku.



$$\boxed{([K]-\lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0}$$

$$[k]_1=[k]_2=\frac{2EI}{l_e^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3=\frac{2EI}{l_e^3}\begin{bmatrix} \frac{kl_e^3}{2EI} & -\frac{kl_e^3}{2EI} \\ -\frac{kl_e^3}{2EI} & \frac{kl_e^3}{2EI} \end{bmatrix}$$

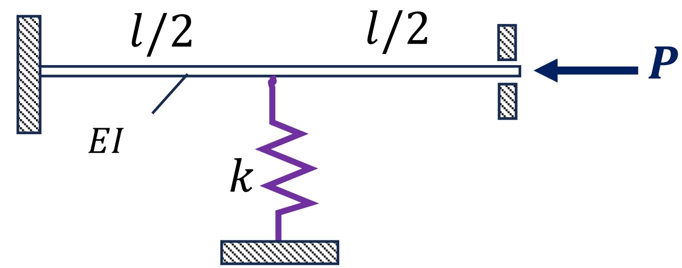


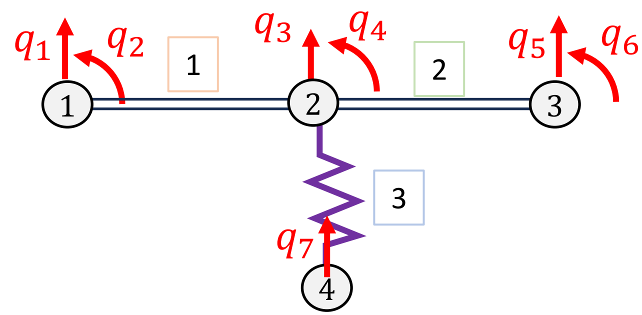
Macierz globalna sztywności:

$$[K]=\frac{2EI}{l_e^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e & & & \\ & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 & & & \\ & & 6+6+\frac{kl_e^3}{2EI} & 3l_e-3l_e & -6 & 3l_e & -\frac{kl_e^3}{2EI} \\ & & & 2l_e^2+2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 & \\ & & & & 6 & -3l_e & \\ & & & & & 2l_e^2 & \\ & & & & & & \frac{kl_e^3}{2EI} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{([K]-\lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0}$$

$$[k_\sigma]_1=[k_\sigma]_2=\frac{1}{30l_e}\begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$





Macierz globalna sztywności geometrycznej:

$$[K_\sigma]=\frac{1}{30l_e}\begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e & & \\ & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 & & \\ & & 36+36 & 3l_e-3l_e & -36 & 3l_e \\ & & & 4l_e^2+4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ & & & & 36 & -3l_e \\ & & & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych: $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q_7 = 0$

$$\left(\frac{2EI}{l_e^3}\begin{bmatrix} 12+\frac{kl_e^3}{2EI} & 0 \\ 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_*}{30l_e}\begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 8l_e^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiamy:

$$\lambda = \frac{l_e^2}{60EI} \cdot \lambda_* \qquad \beta = \frac{kl_e^3}{2EI}$$

$$\begin{bmatrix} 12+\beta-72\lambda & 0 \\ 0 & 4l_e^2(1-2\lambda) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

$$(12+\beta-72\lambda)(1-2\lambda) = 0$$

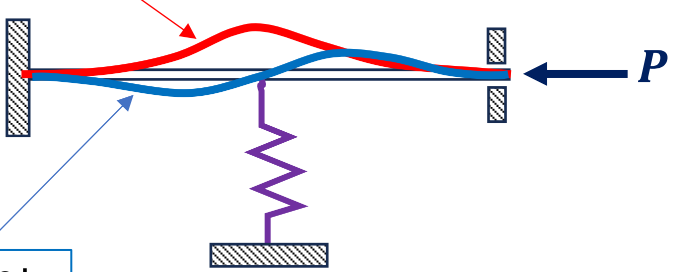
pierwiastki: $\lambda_1 = \frac{12+\beta}{72}$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Jeśli $\boldsymbol{\beta < 24} \rightarrow k < \frac{48EI}{l_e^3} \rightarrow \lambda_1 < \lambda_2$ (słaba sprężyna)

i wtedy utrata stateczności zajdzie w **postaci 1**:

$$\lambda_1^* = \frac{60EI}{l_e^2}\lambda_1 = \left(40 + \frac{20}{6}\beta\right)\frac{EI}{l_e^2}$$

$$\lfloor q \rfloor_1 = \lfloor 0, 0, q_3, 0, 0, 0, 0 \rfloor$$



Jeśli $\boldsymbol{\beta > 24} \rightarrow k > \frac{48EI}{l_e^3} \rightarrow \lambda_2 < \lambda_1$ (silna sprężyna)

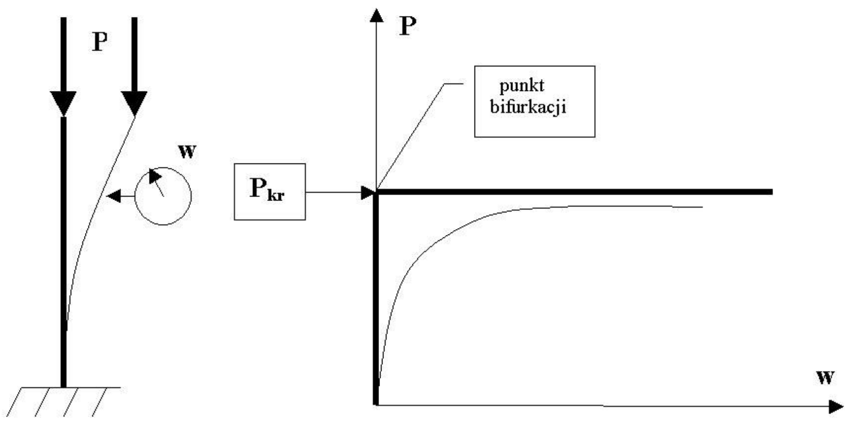
i wtedy utrata stateczności zajdzie w **postaci 2**:

$$\lambda_2^* = \frac{60EI}{l_e^2}\lambda_2 = \frac{30EI}{l_e^2}$$

$$\lfloor q \rfloor_2 = \lfloor 0, 0, 0, q_4, 0, 0, 0 \rfloor$$

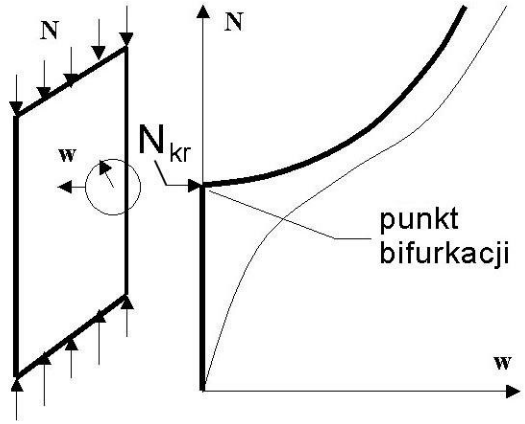
BADANIE STATECZNOŚCI ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH. WYBOCZENIE PŁYT CIENKOŚCIENNYCH

- W rzeczywistych konstrukcjach (gdy jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu do pozostałych), przy pewnych krytycznych wartościach obciążeń, występuje zjawisko zmiany postaci równowagi ustroju, wywołane nawet niewielkimi zaburzeniami.
- Przejście z jednej postaci równowagi do drugiej związane jest z reguły z bardzo dużym wzrostem deformacji i naprężeń, prowadzącym w wielu przypadkach do zniszczenia ustroju.
- Badanie stateczności polega na sprawdzeniu, czy konstrukcja jest odporna na zmianę postaci równowagi pod wpływem zaburzeń.
- Celem jest wyznaczenie takiej wartości obciążenia, przy którym konstrukcja traci stateczność, tzn. dowolnie małe zaburzenie prowadzi do zmiany postaci równowagi.
- Przykładowo dla smukłej, prostej belki ściskanej model zjawiska zakłada dwie postacie równowagi występujące równocześnie przy obciążeniu siłą krytyczną P_{kr} w punkcie bifurkacji.



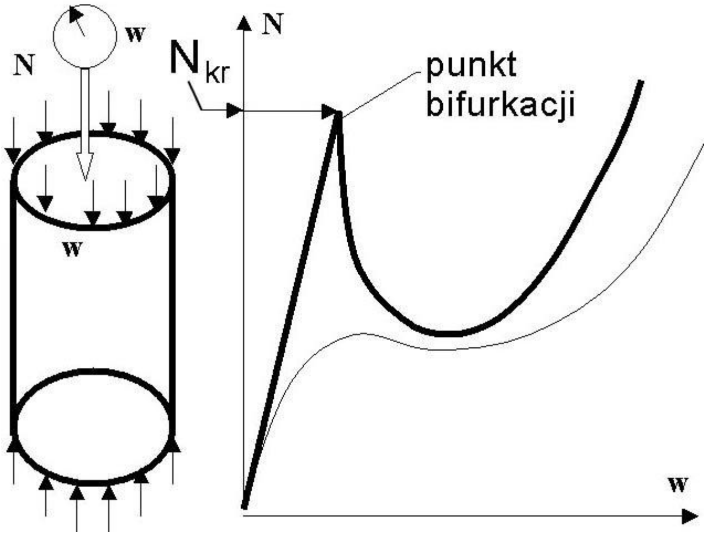
Postać pierwotna dotyczy stanu przed utratą stateczności, w którym oś belki pozostaje prosta, druga postać dotyczy stanu po utracie stateczności, w którym oś belki jest wygięta.
W rzeczywistości przy obciążeniu krytycznym belka ulega zwykle zniszczeniu.

- Punkt bifurkacji jest cechą równań w modelu matematycznym opisującym utratę stateczności i często niedokładnie oddaje fizykę zjawiska.
- W przypadku płyty, po utracie stateczności ustrój może jeszcze przenosić obciążenia pozostając w równowadze i w stanie sprężystym, a przejście z jednej postaci równowagi w drugą jest łagodne.



- Przekroczenie obciążenia krytycznego w przypadku płyt zwykle nie prowadzi do ich zniszczenia *(zależy to między innymi od sposobu podparcia krawędzi). Płyta zaczyna się falować oraz znacznie spada jej sztywność w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej*.
- Często takie zachowanie się płyty uważa się za niedopuszczalne i obciążenie krytyczne przyjmuje się za obciążenie niszczące. *Dokładne zachowanie się płyty ściskanej lub ścinanej przy obciążeniu przekraczającym obciążenie krytyczne możemy otrzymać rozwiązując nieliniowe równanie równowagi. Jest to zadanie dość trudne, szczególnie przy złożonych obciążeniach i warunkach brzegowych.*
- Znajomość postaci wyboczenia pozwala konstruktorowi zaprojektować odpowiednie wzmocnienia zwykle w postaci usztywniających żeber, które podwyższają wartość obciążenia krytycznego. W typowych cienkościennych konstrukcjach lotniczych wzmocnienia w postaci żeber i podłużnic stanowią szkielet podpierający cienkie pokrycie. *Innym często stosowanym sposobem podwyższenia obciążenia krytycznego jest tworzenie płyt przekładkowych o dużej zastępczej sztywności płytowej.*

- Cienkościenne powłoki tracą stateczność ulegając pofalowaniu w obszarach ściskanych i ścinanych.
- Określenie obciążeń krytycznych dla powłok jest znacznie trudniejsze niż dla płyt ze względu na bardziej złożone równania, w których uwzględnione są jej krzywizny, a krytyczna wartość obciążenia odpowiadająca punktowi bifurkacji może być zawyżona kilkakrotnie.



- Często w przypadku powłok nie można mówić o naprężeniach krytycznych, jako o wartości, przy której następuje łagodne przejście z jednej postaci równowagi w drugą, gdyż przejście może mieć charakter przeskoku. *Rzeczywiste powłoki są często bardzo dalekie od ideału. Istnienie wstępnych niedokładności obniża znacznie wartość obciążenia krytycznego oraz ułatwia proces przeskoku. Z tego powodu licząc się z realnym wykonaniem powłok jak również z faktem, ze bardziej grubościenne powłoki można wykonać dokładniej niż cienkościenne podwyższamy odpowiednio współczynnik bezpieczeństwa podczas projektowania.*
- Istnieje wiele poradników inżynierskich, w których na podstawie wieloletnich analiz i badań doświadczalnych podano szereg wzorów określających bezpieczne ze względu na wyboczenie obciążenie dla różnych powłok. *Niezbędna jest jednak przeważnie znajomość obciążenia krytycznego, którego sposób określenia zostanie tutaj przedstawiony.*

- Dokładne zachowanie się powłoki ściskanej lub skręcanej przy obciążeniu zbliżonym lub większym od obciążenia krytycznego z uwzględnieniem rzeczywistych kształtów geometrycznych można otrzymać rozwiązując nieliniowe równania równowagi. *Jest to zadanie trudne szczególnie przy złożonych kształtach geometrycznych, warunkach brzegowych i obciążeniach.*
- Obecnie takie przypadki analizowane są głównie za pomocą MES. *W metodzie elementów skończonych najprostsze obliczenia stateczności konstrukcji polegają na znalezieniu postaci utraty stateczności i wartości obciążeń odpowiadających przejściu z jednej postaci równowagi w drugą w punkcie bifurkacji.*
- Największe znaczenie ma pierwsza postać utraty stateczności.

Linearyzacja nieliniowych równań wokół początkowego położenia równowagi (belek, płyt, powłok) prowadzi do układu równań w postaci zagadnienia na wartości własne:

$$\boxed{([K]-\lambda_*[K_\sigma])\{q\}=0}$$

Określenie obciążenia krytycznego oraz postaci wyboczenia następuje w dwóch krokach:

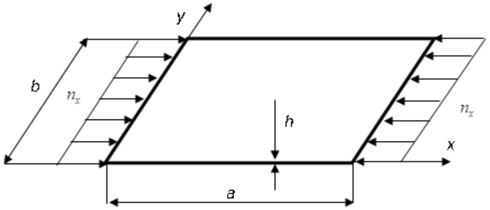
1) Rozwiązanie statyczne dla określonego obciążenia $([K]\{q\}=\{P\})$, po którym następuje obliczenie macierzy $[K_\sigma]$,
2) Rozwiązanie zagadnienia na wartości własne czyli obliczenie λ_* i $\{q\}$,

gdzie: λ_* jest współczynnikiem mówiącym, ile razy należy zwiększyć obciążenie statyczne $\{P\}$, dla którego określana była macierz $[K_\sigma]$, aby stało się ono obciążeniem krytycznym,

$\{q\}$ – wektorem opisującym postać utraty stateczności.

Przykład 5a Płyta ściskana podparta przegubowo na brzegach

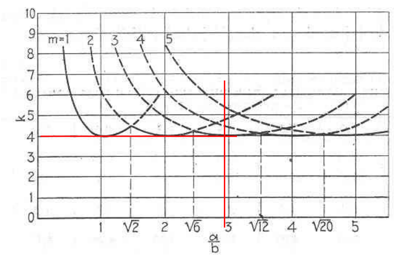
Płyta o wymiarach a= 885mm, b= 302mm, h = 2,5mm, wykonana z duraluminium (E=70000 MPa, ν=0.33) została obciążona wydatkiem ściskającym na brzegu i swobodnie podparta na czterech krawędziach (u_z=0).

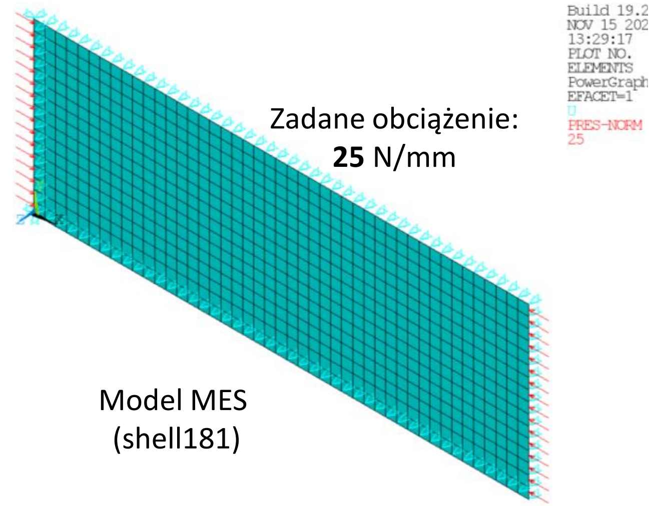


$$\sigma_{kr} = k\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{b^2}$$

(rozwiązanie ścisłe)

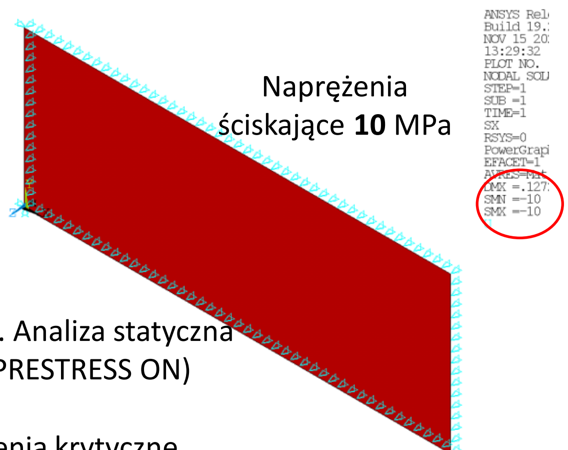
$k = 4$ → $\sigma_{kr} = 17.7\ MPa$





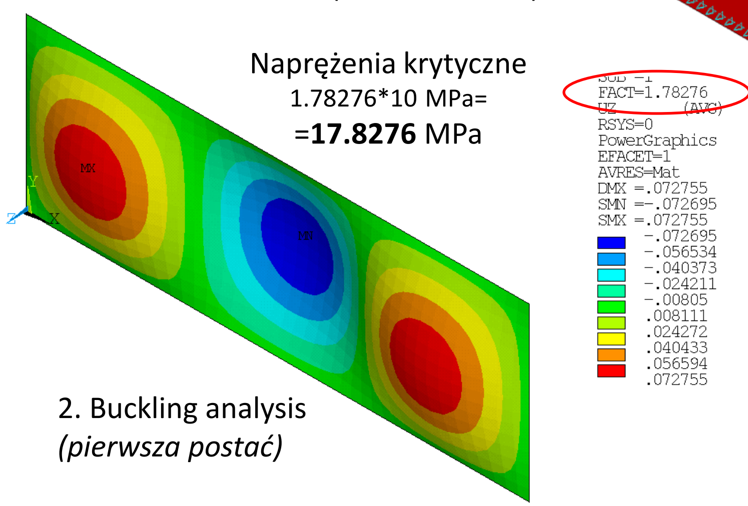
Zadane obciążenie:
25 N/mm

Model MES
(shell181)



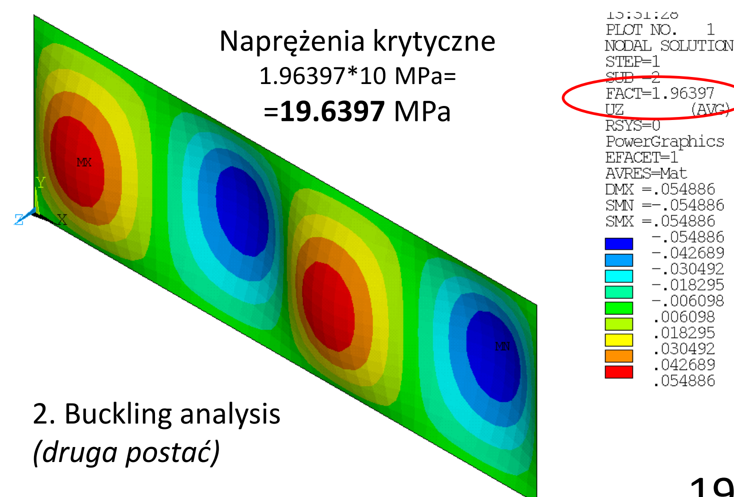
Naprężenia
ściskające **10** MPa

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)



Naprężenia krytyczne
1.78276*10 MPa=
=**17.8276** MPa

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)

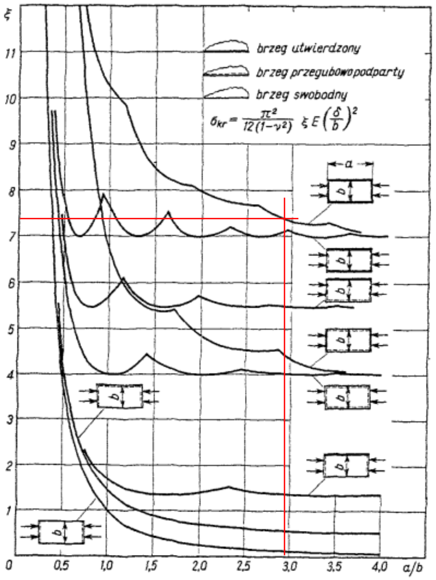


Naprężenia krytyczne
1.96397*10 MPa=
=**19.6397** MPa

2. Buckling analysis
(druga postać)

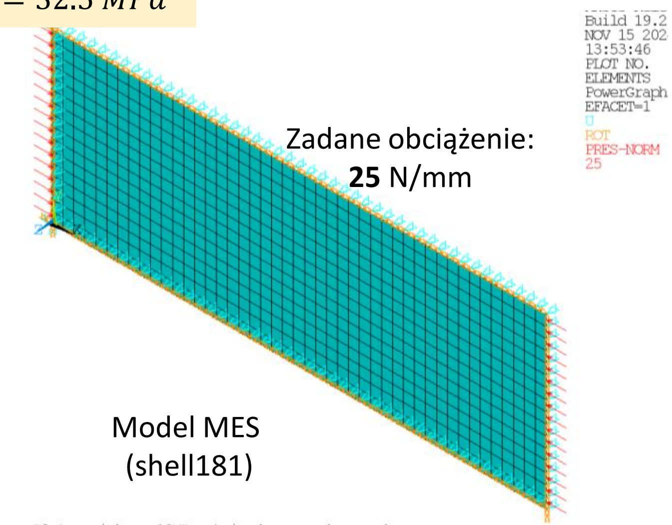
Przykład 5b Płyta ściskana utwierdzona na brzegach

Płyta o wymiarach a= 885mm, b= 302mm, h = 2,5mm, wykonana z duraluminium (E=70000 MPa, ν=0.33) została obciążona wydatkiem ściskającym na brzegu i utwierdzona na brzegach.



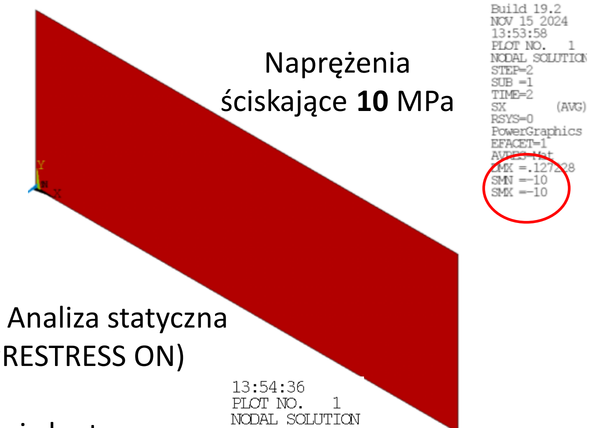
$$\boxed{\sigma_{kr} = \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{b^2}} \xrightarrow{\xi = 7.35} \sigma_{kr} = 32.5\ MPa$$

(rozwiązanie ścisłe)



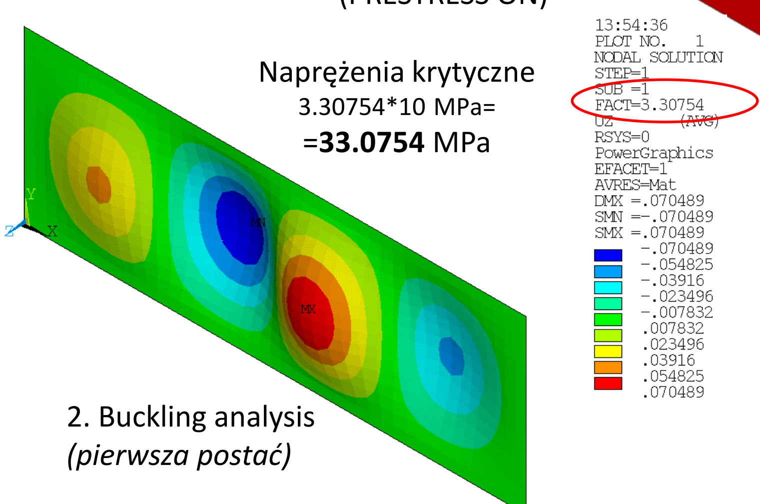
Zadane obciążenie:
25 N/mm

Model MES
(shell181)



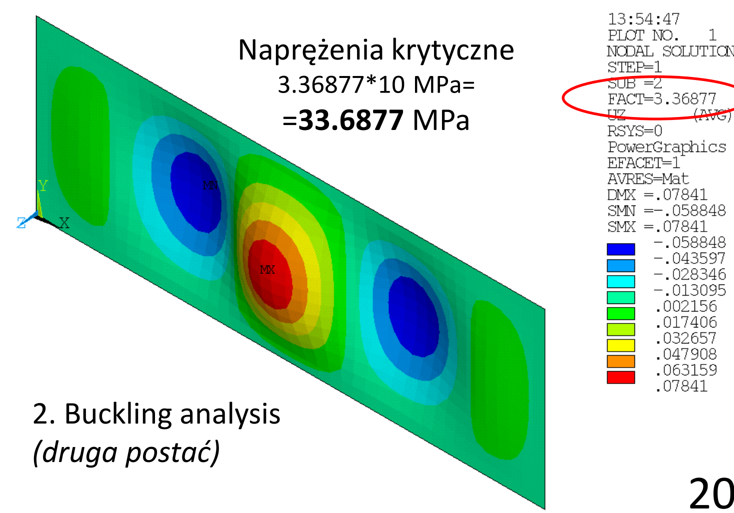
Naprężenia
ściskające **10** MPa

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)



Naprężenia krytyczne
3.30754*10 MPa=
=**33.0754** MPa

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)



Naprężenia krytyczne
3.36877*10 MPa=
=**33.6877** MPa

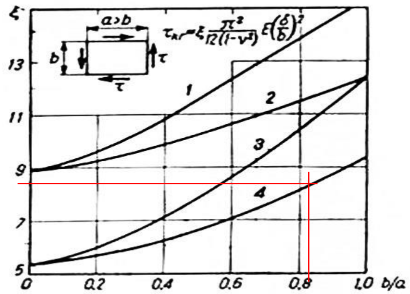
2. Buckling analysis
(druga postać)

Przykład 6 Płyta ścinana

Płyta o wymiarach a=630mm, b=520mm, h=2mm, została wykonana z kompozytu o zastępczych własnościach mechanicznych równych: moduł Younga E=45926 MPa, liczba Poissona ν=0.33. W celu wprowadzenia stałych naprężeń stycznych płyta została umieszczona w czworoboku przegubowym wykonanym z prętów stalowych o przekroju A_p=1000 mm^2 ($E_p=2\cdot10^5$ MPa, ν_p=0,33) obciążonym siłą pionową w narożu Płyta z prętami ma tylko wspólne przemieszczenia – połączona jest przegubowo.

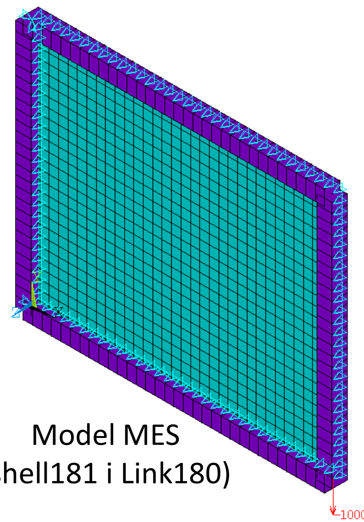
$$\tau_{kr} = \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{b^2}$$

(rozwiązanie ścisłe)



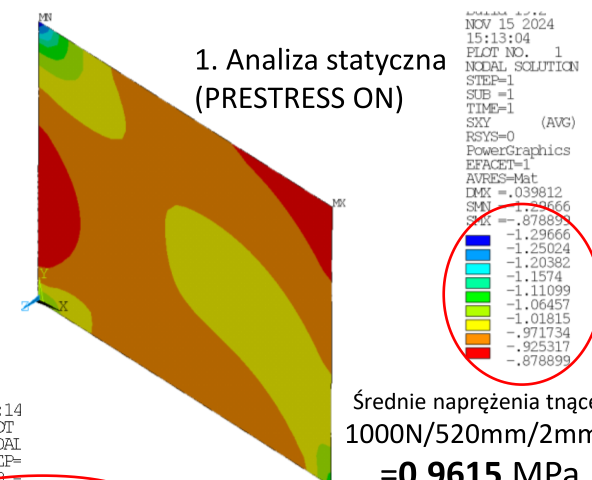
$$\boldsymbol{\tau_{kr}} = 8.25 \frac{\pi^2}{12(1-0.33^2)} \frac{45926\cdot 2^2}{520^2} = \mathbf{5.18}MPa$$

Fkr=5.18MPa*520mm*2mm=**5387**N



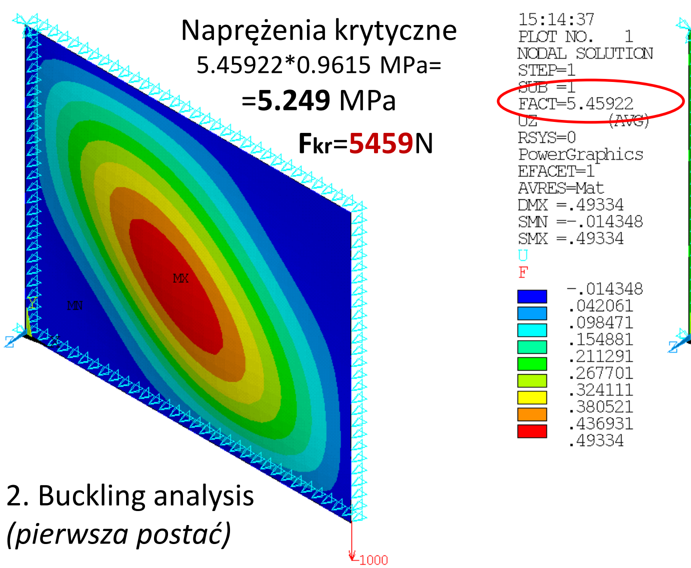
Model MES
(shell181 i Link180)

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

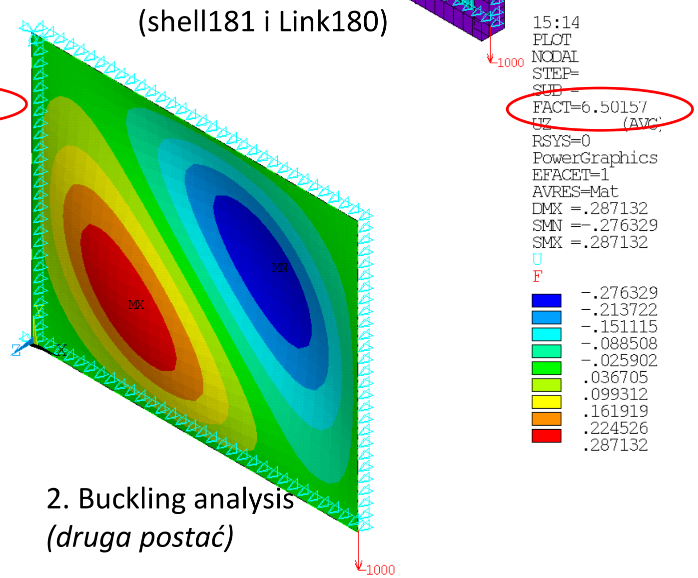


Średnie naprężenia tnące:
1000N/520mm/2mm=
=**0.9615** MPa

Naprężenia krytyczne
5.45922*0.9615 MPa=
=**5.249** MPa
Fkr=**5459**N

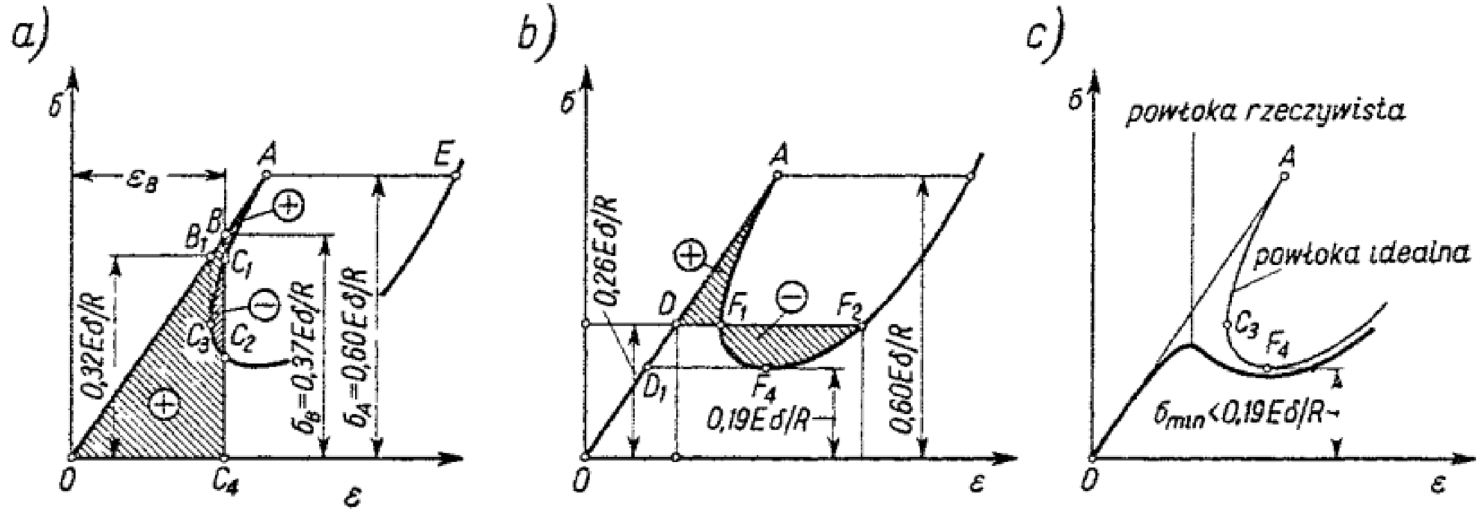


2. Buckling analysis
(pierwsza postać)



2. Buckling analysis
(druga postać)

Przykład 7a Powłoka walcowa: R=100mm, H=300mm, h=1mm, E=7e4 MPa, ν=0.33



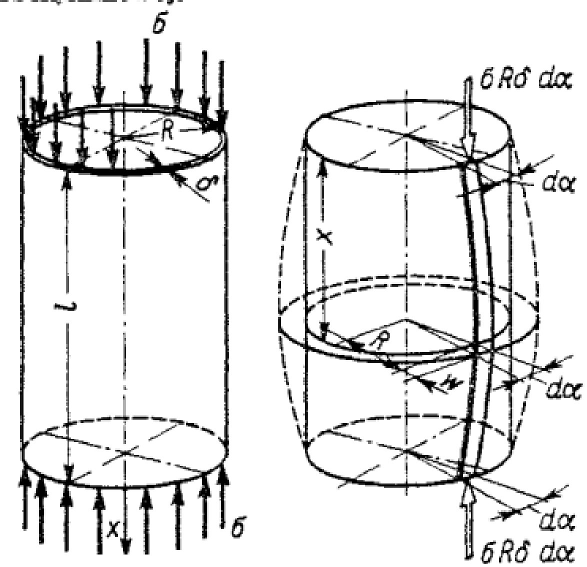
Rys. 11.28. Warianty przeskoku ściskanej powłoki cylindrycznej
a) przeskok na maszynie sztywnej; b) przeskok na maszynie obciążnikowej.

$$\sigma_{kr}^{A} \approx 0.6E\frac{h}{R} = 0.6 \cdot 7e4\frac{0.5}{100} = 210MPa$$

$$\sigma_{kr}^{B} \approx 0.37E\frac{h}{R} = 129.5MPa$$

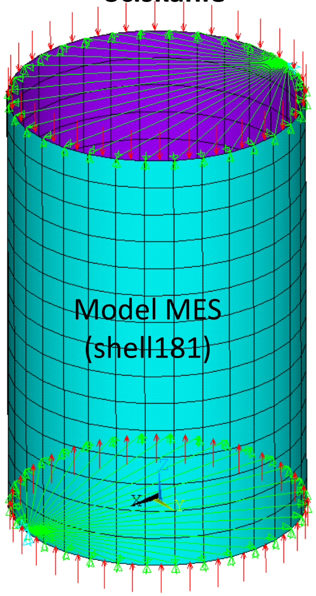
$$\sigma_{kr}^{D} \approx 0.26E\frac{h}{R} = 91MPa$$

$$\sigma_{kr}^{D1} \approx 0.19E\frac{h}{R} = 66.5MPa$$

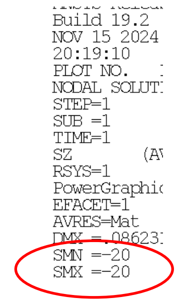


Przykład 7b Powłoka walcowa: R=100mm, H=300mm, h=0.5mm, E=7e4 MPa, ν=0.33

Ściskanie

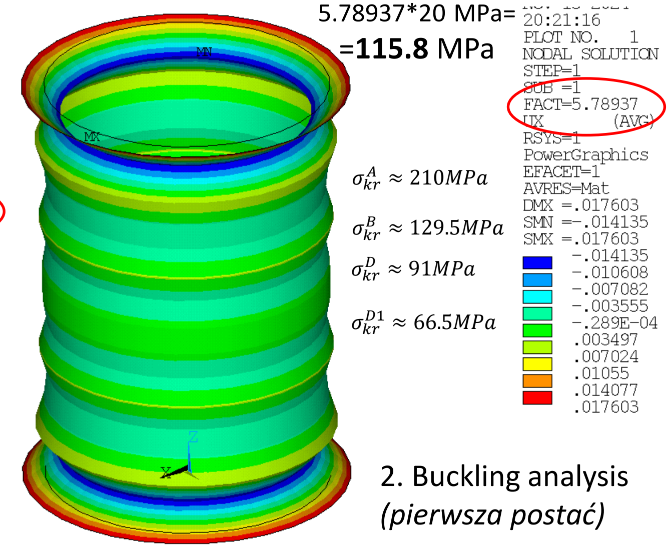


walec sciskany 20MPa



1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

Naprężenia krytyczne
5.78937*20 MPa=
=**115.8** MPa



$\sigma_{kr}^{A} \approx 210MPa$

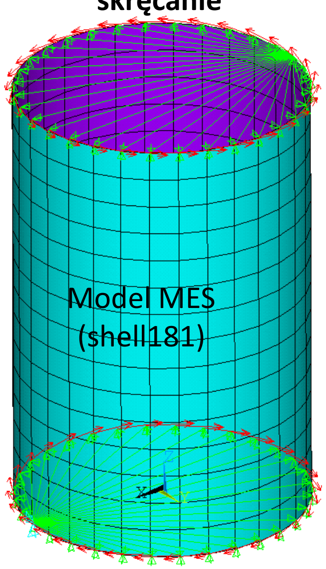
$\sigma_{kr}^{B} \approx 129.5MPa$

$\sigma_{kr}^{D} \approx 91MPa$

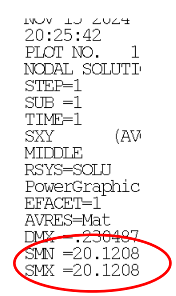
$\sigma_{kr}^{D1} \approx 66.5MPa$

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)

skręcanie

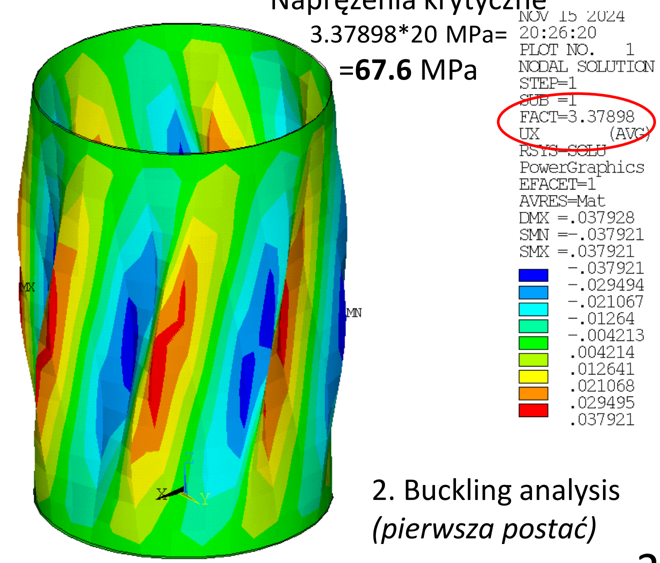


walec scinany skretnie 20MPa



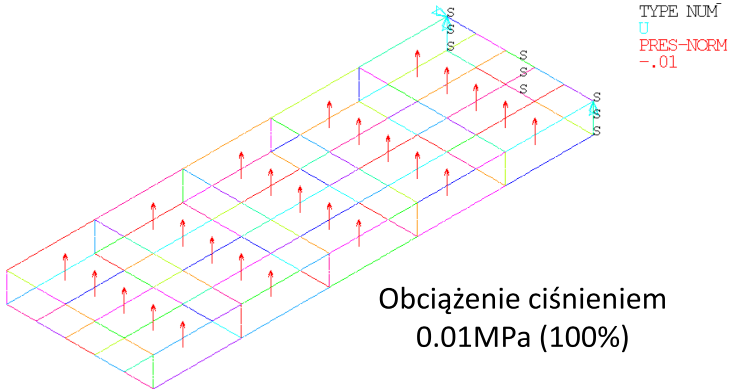
1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

Naprężenia krytyczne
3.37898*20 MPa=
=**67.6** MPa



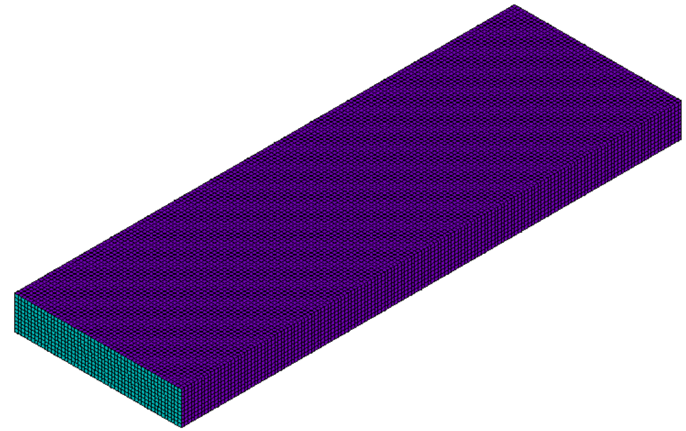
2. Buckling analysis
(pierwsza postać)

Przykład 8a Keson zginany bez pasów: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, ν=0.33

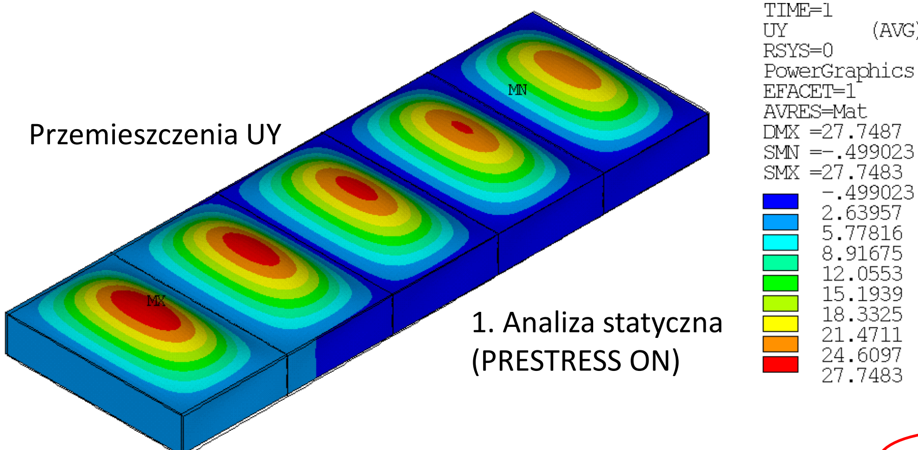


Obciążenie ciśnieniem
0.01MPa (100%)

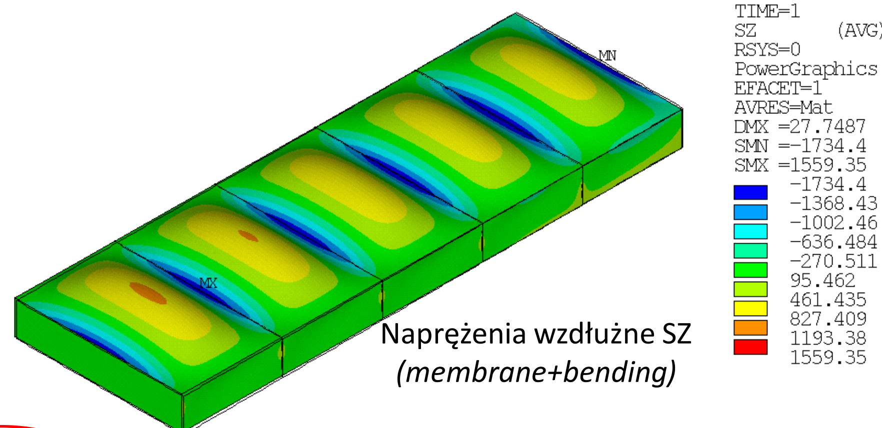
```
/TITLE,Keson bez pasow
*SET,H,100  ! wysokosc
*SET,B,500  ! szerokosc
*SET,L,1500 ! dlugosc
*SET,npas,4 ! liczba pasow
*SET,grub,0.5 ! grubosc pokrycia
*SET,R_pas,5 !promien pasa
*SET,grub_zebr,2 ! grubosc zebra
*SET,E_SIZE,10 ! rozmiar elementow
*SET,F_SILA,1000 ! sila pionowa
*SET,pressure,0.01
*SET,EE,7e5
*SET,NI,.32
```



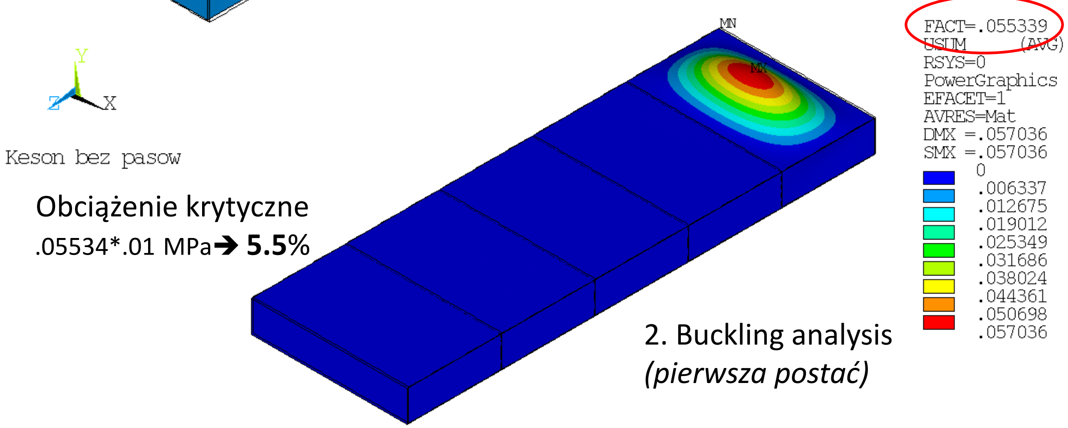
Przemieszczenia UY



1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

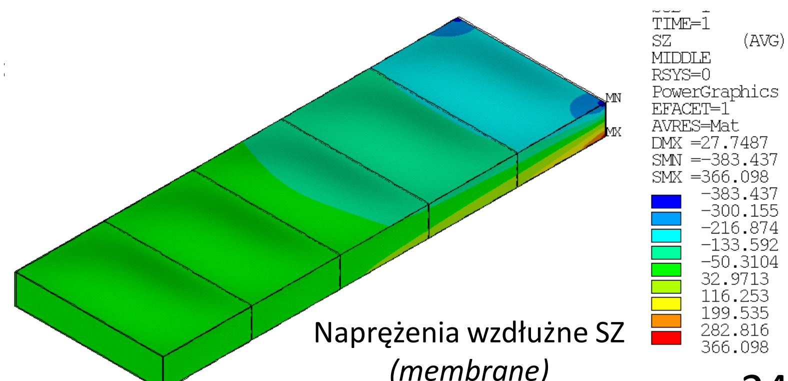


Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane+bending)



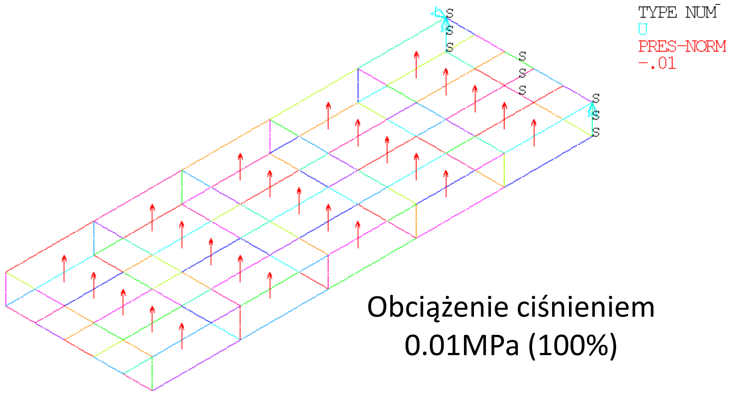
Obciążenie krytyczne
.05534*.01 MPa→ **5.5%**

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)



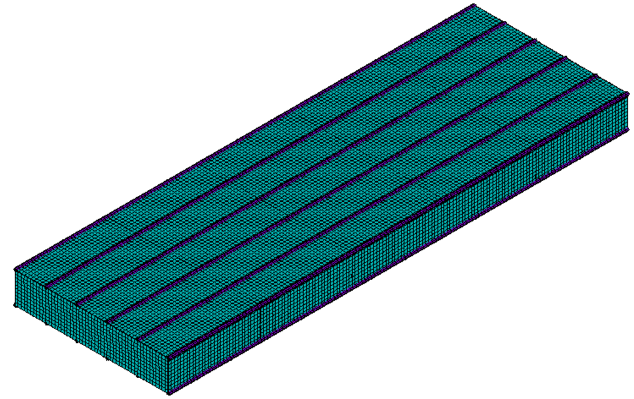
Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane)

Przykład 8b Keson zginany z pasami: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, ν=0.33

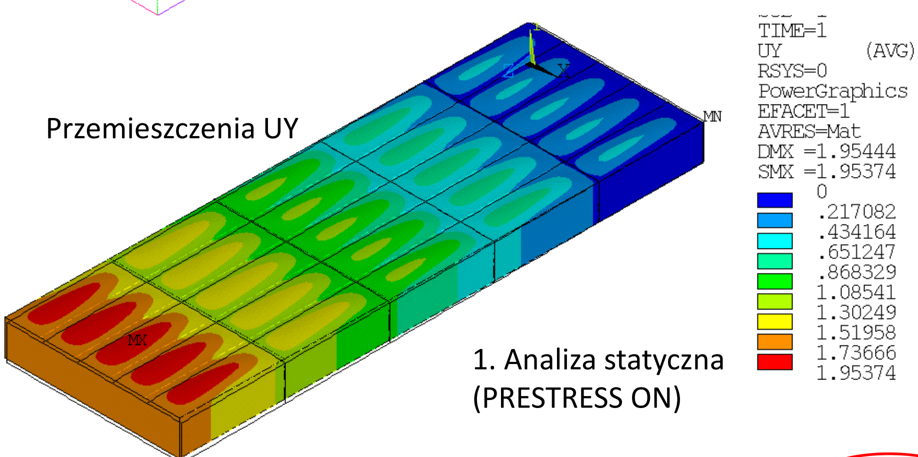


Obciążenie ciśnieniem
0.01MPa (100%)

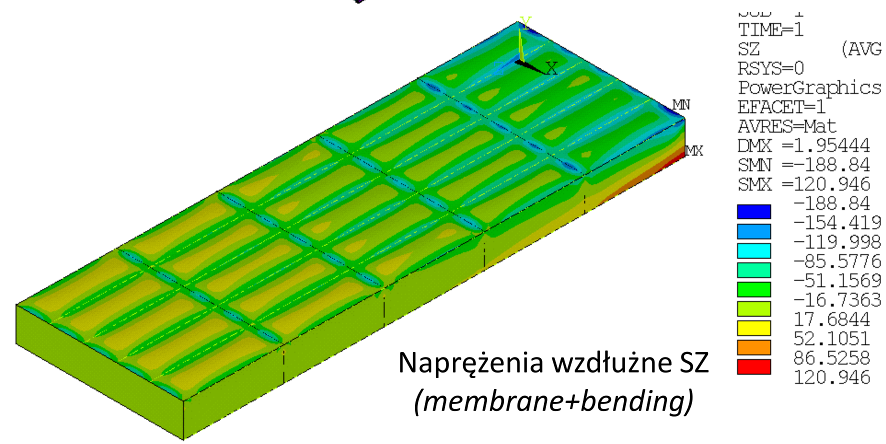
```
/TITLE,Keson z pasami
*SET,H,100  ! wysokosc
*SET,B,500  ! szerokosc
*SET,L,1500 ! dlugosc
*SET,npas,4 ! liczba pasow
*SET,grub,0.5 ! grubosc pokrycia
*SET,R_pas,5 !promien pasa
*SET,grub_zebr,2 ! grubosc zebra
*SET,E_SIZE,10 ! rozmiar elementow
*SET,F_SILA,1000 ! sila pionowa
*SET,pressure,0.01
*SET,EE,7e5
*SET,NI,.32
```



Przemieszczenia UY

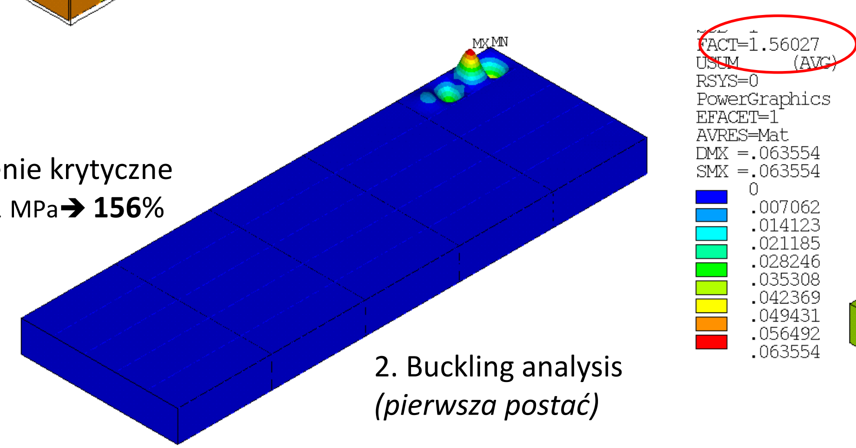


1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

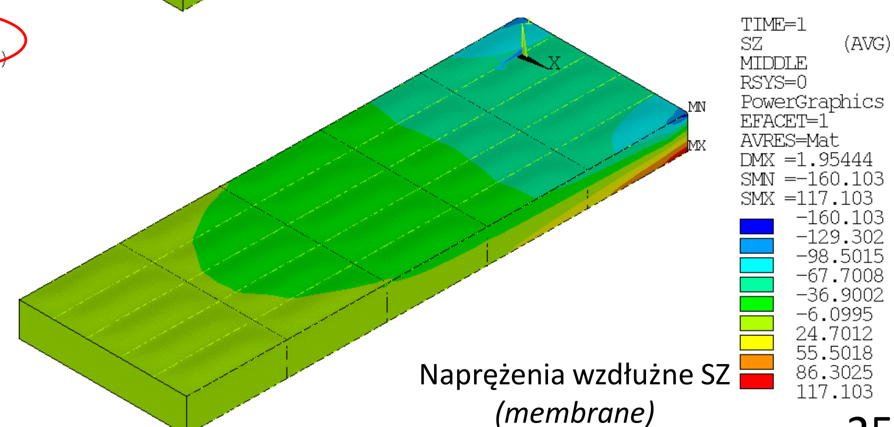


Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane+bending)

Obciążenie krytyczne
1.56*.01 MPa→ **156%**



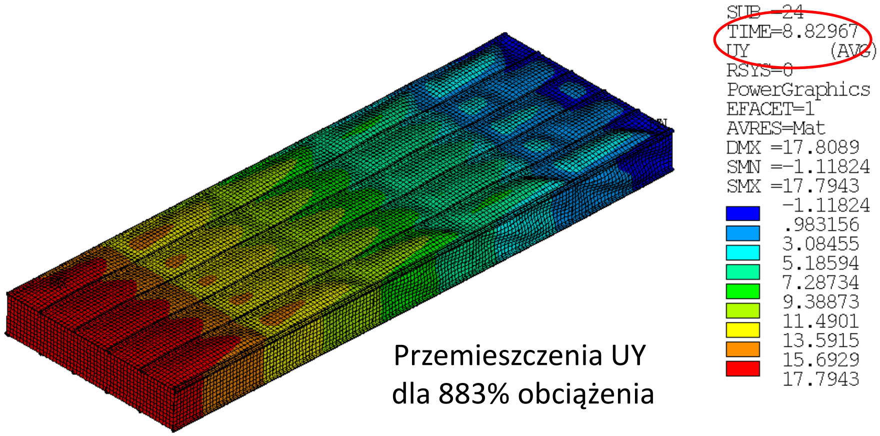
2. Buckling analysis
(pierwsza postać)



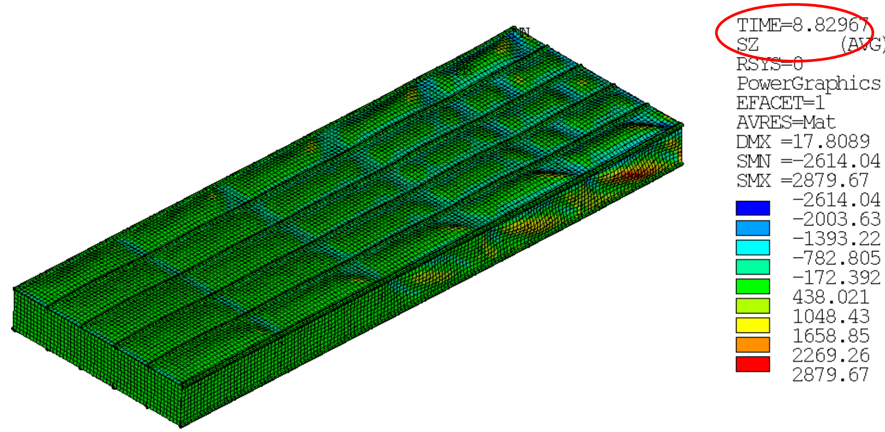
Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane)

Przykład 8c Keson zginany z pasami NL geom: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, ν=0.33

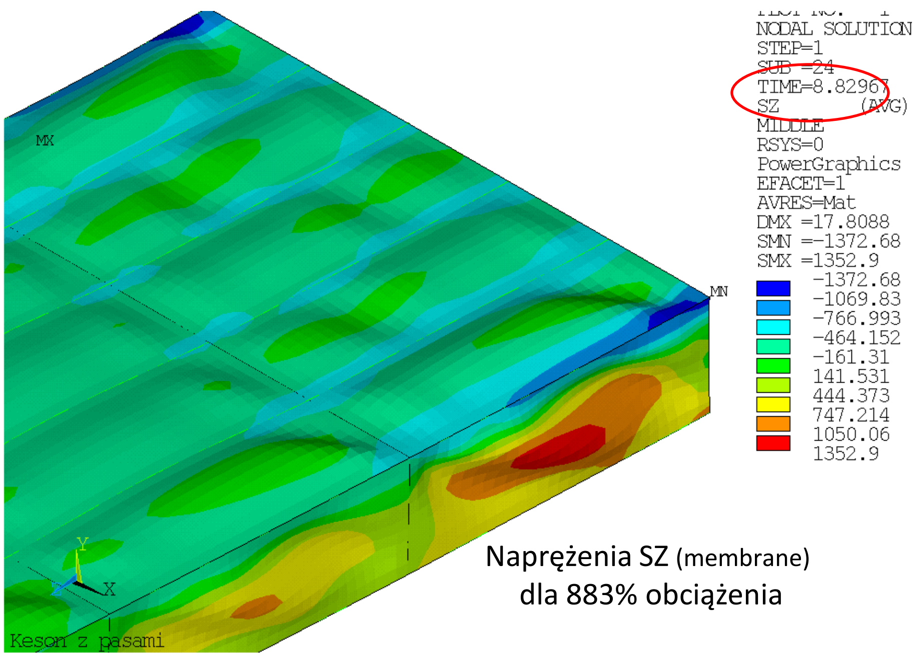
Obliczenia nieliniowe geometrycznie



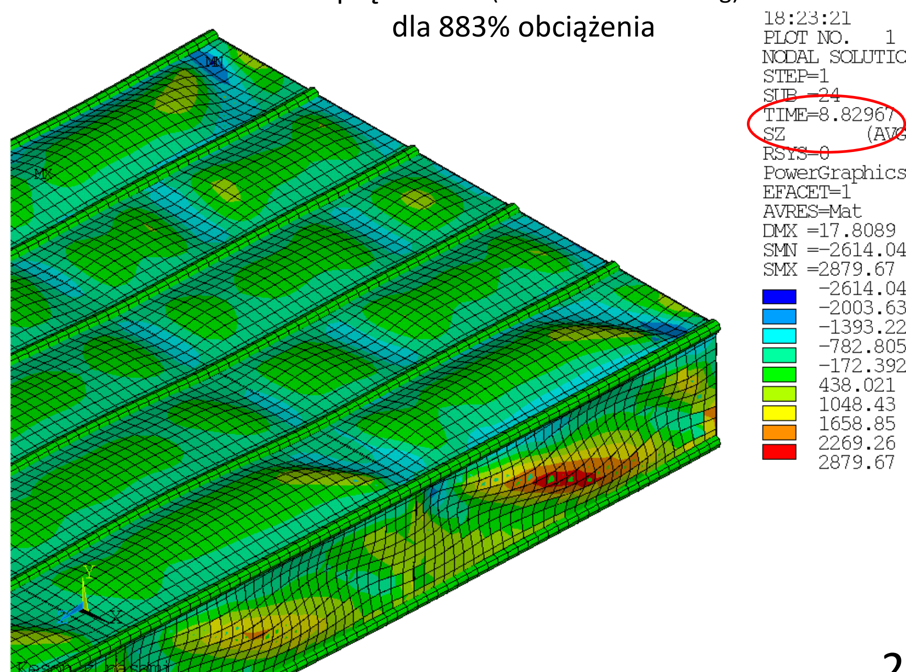
Przemieszczenia UY
dla 883% obciążenia



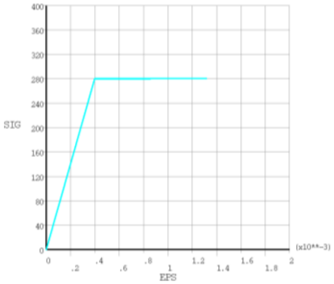
Naprężenia SZ (membrane + bending)
dla 883% obciążenia



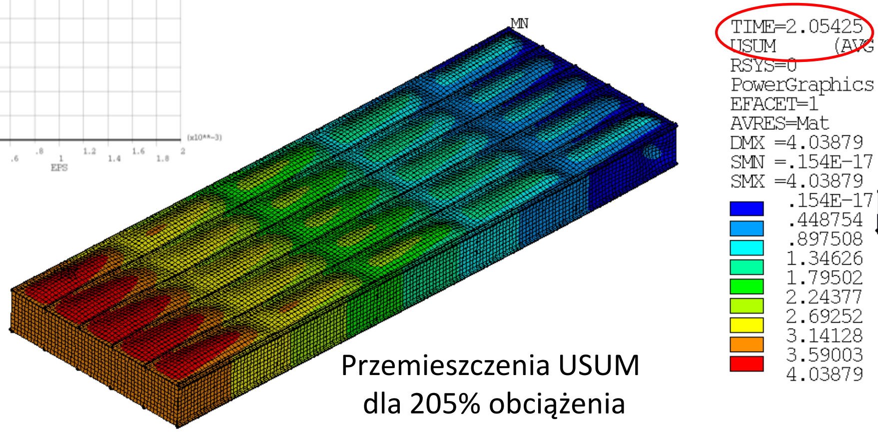
Naprężenia SZ (membrane)
dla 883% obciążenia



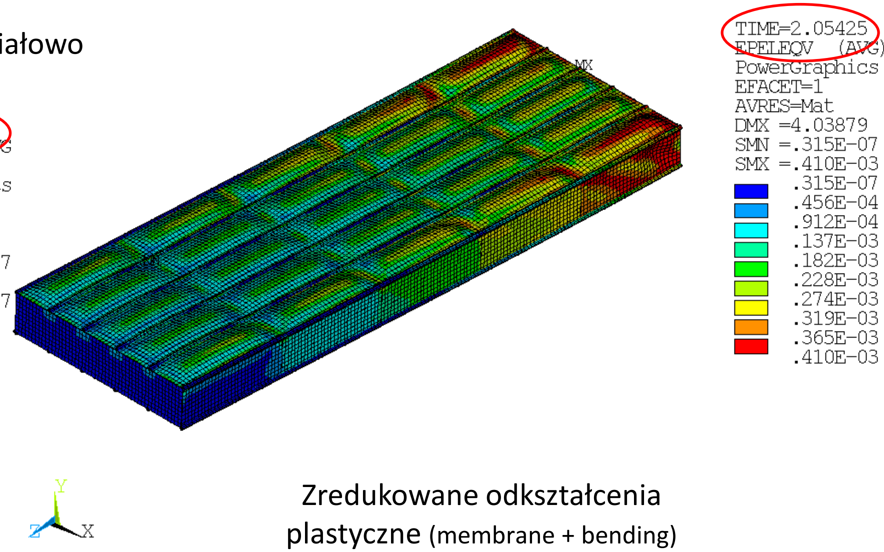
Przykład 8d Keson zginany z pasami PLNL geom: E=7e4 MPa, ν=0.33, R0.2=280MPa, Eu=500MPa



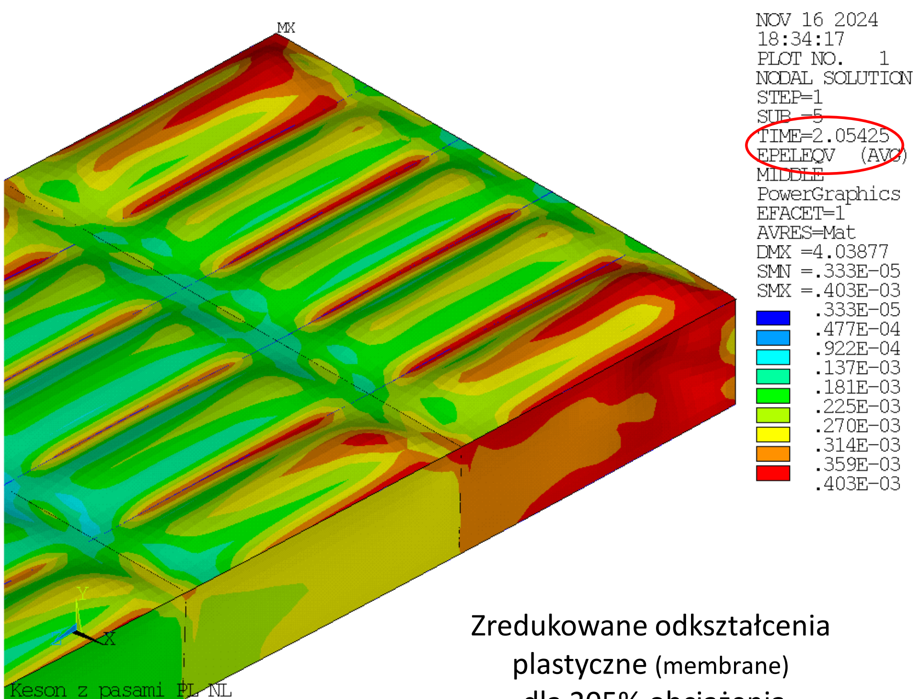
Obliczenia nieliniowe geometrycznie i materiałowo



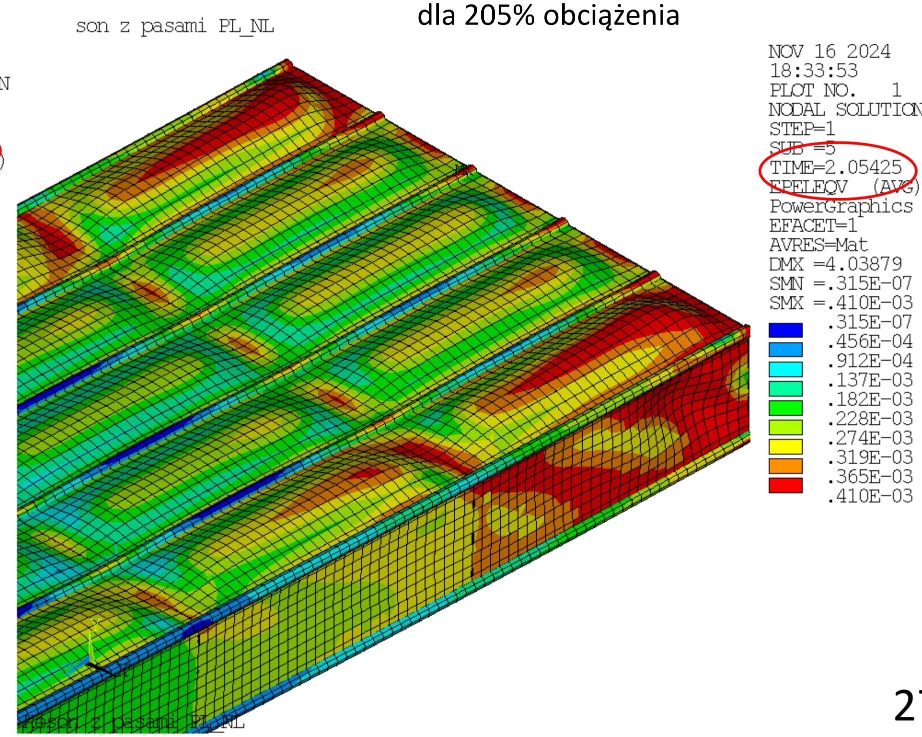
Przemieszczenia USUM dla 205% obciążenia



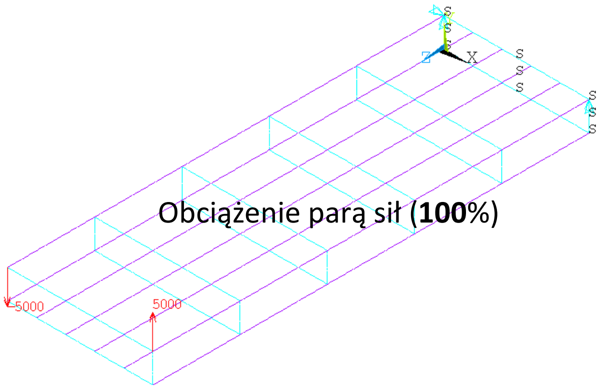
Zredukowane odkształcenia plastyczne (membrane + bending) dla 205% obciążenia



Zredukowane odkształcenia plastyczne (membrane) dla 205% obciążenia

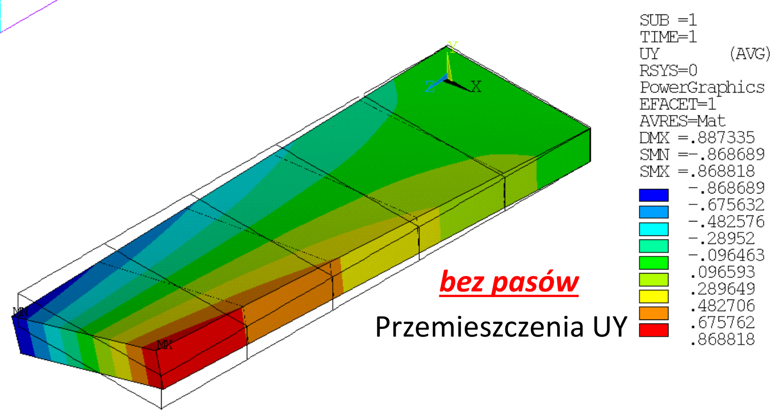


Przykład 8a Keson skręcany: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, ν=0.33



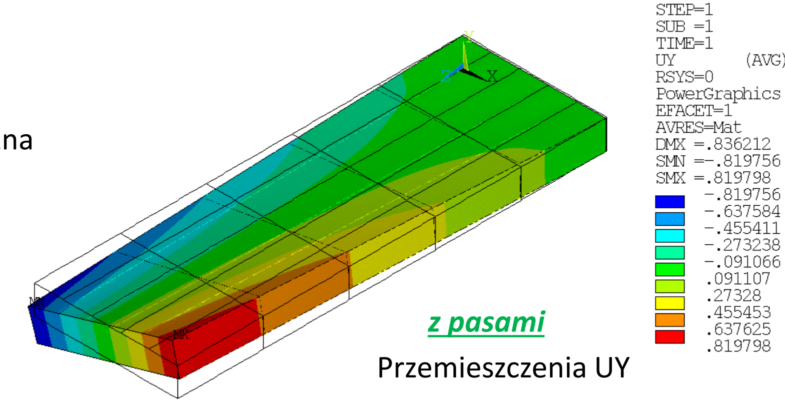
Obciążenie parą sił (**100**%)

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)



bez pasów

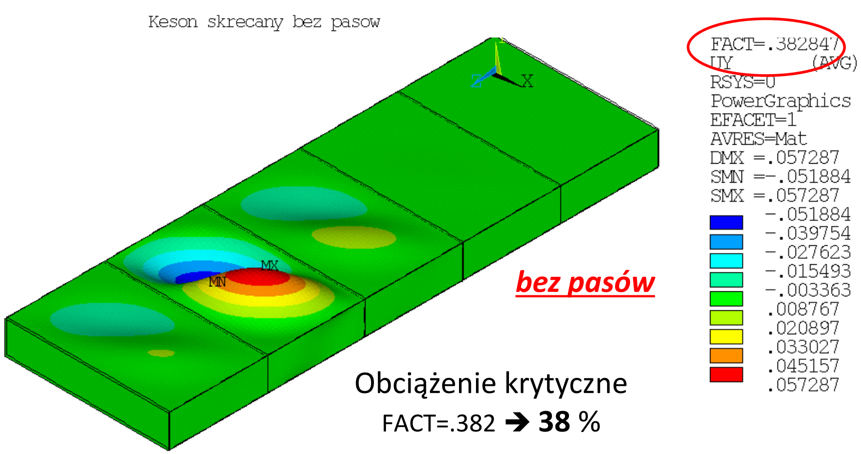
Przemieszczenia UY



z pasami

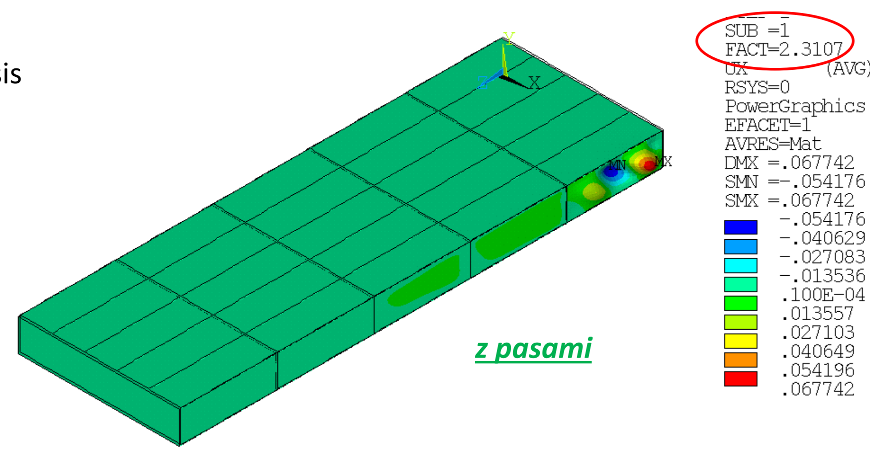
Przemieszczenia UY

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)



bez pasów

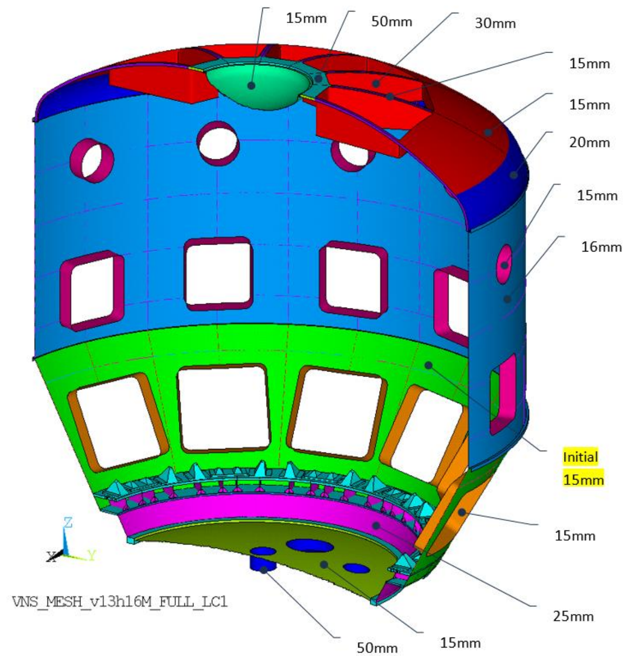
Obciążenie krytyczne
FACT=.382 → **38** %

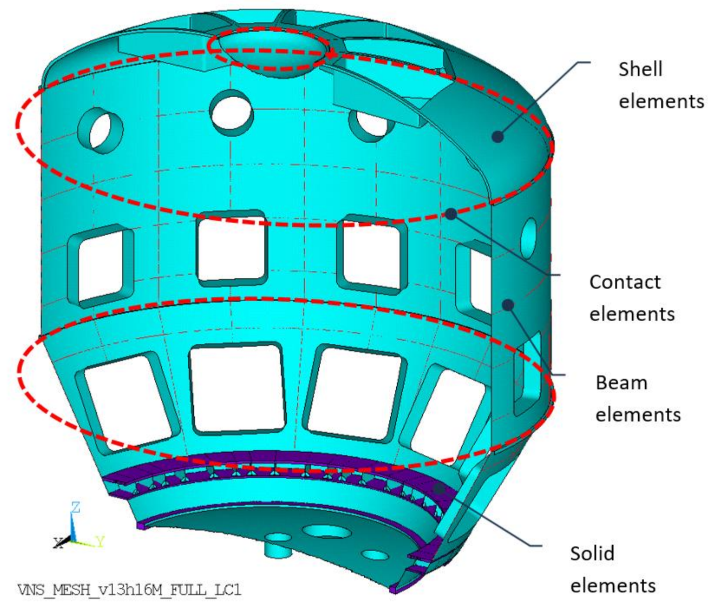


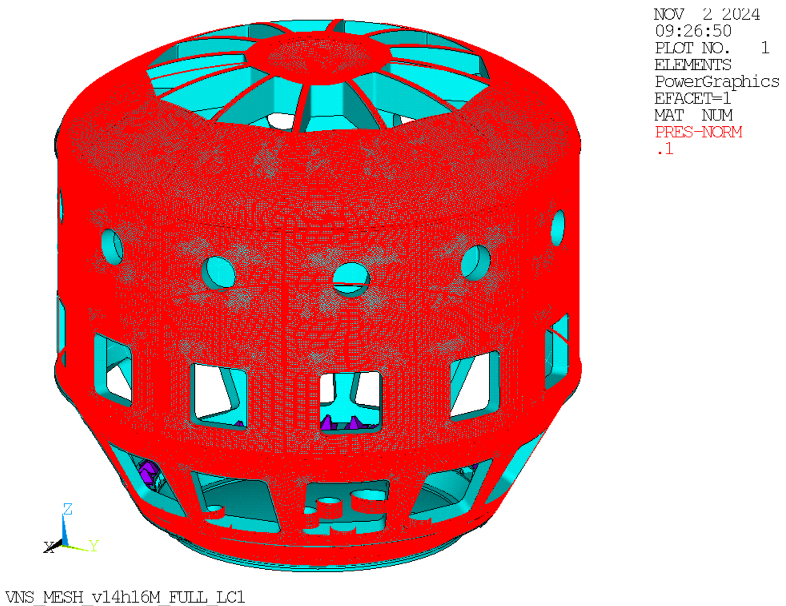
z pasami

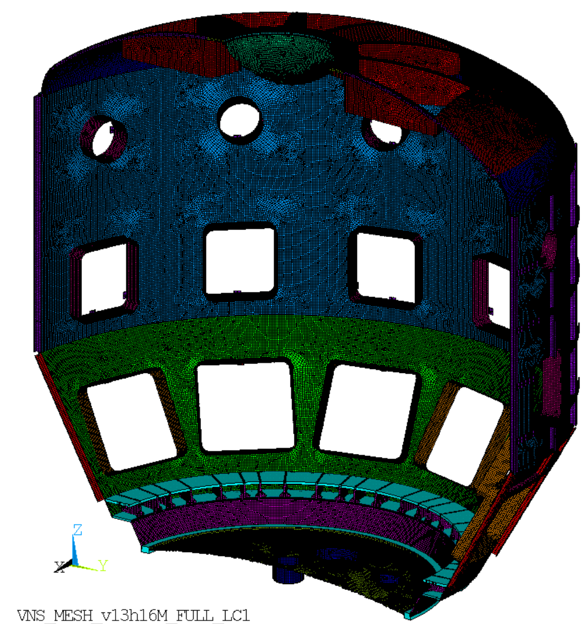
Obciążenie krytyczne
FACT=2.3107 → **231** %

Structural analysis of the cryostat (VNS Feasibility study 2024)



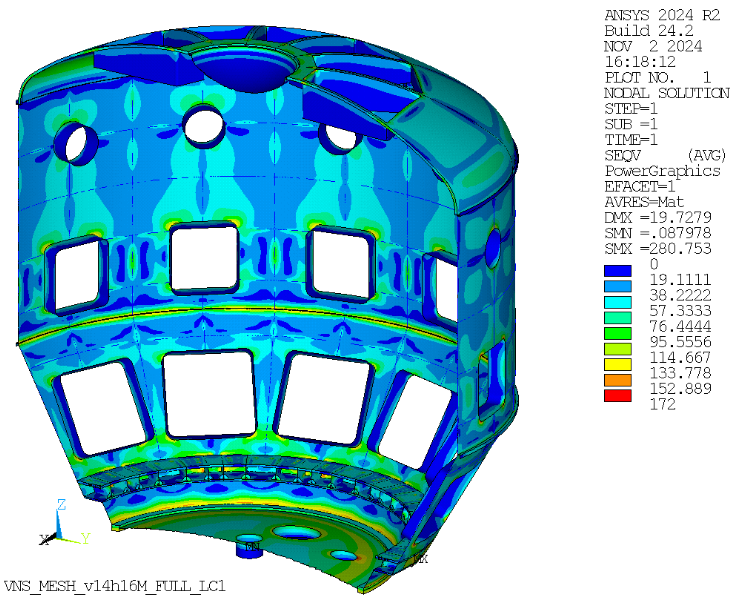


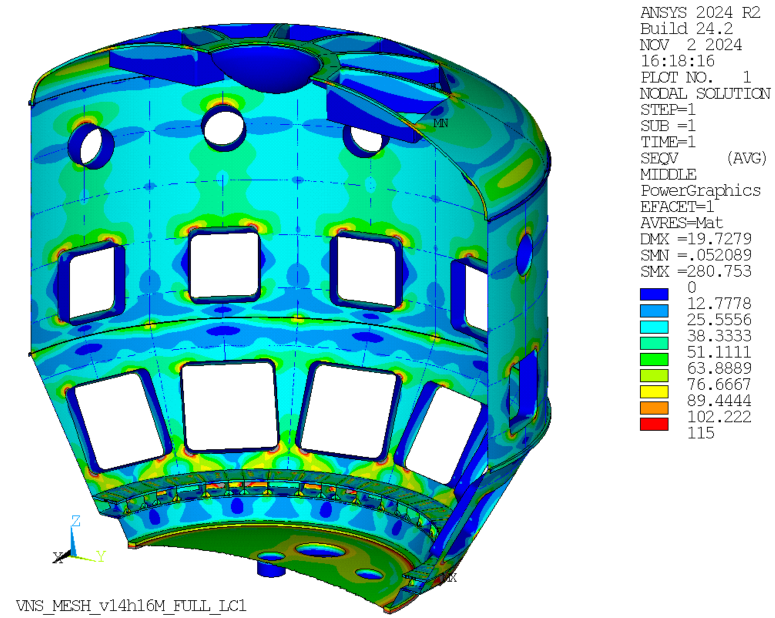




EUROfusion

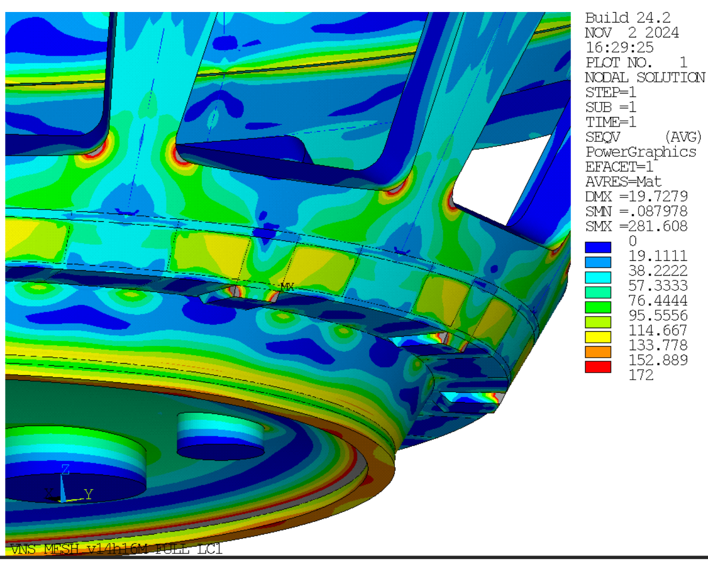
Load case 1: Normal operation (P + D)

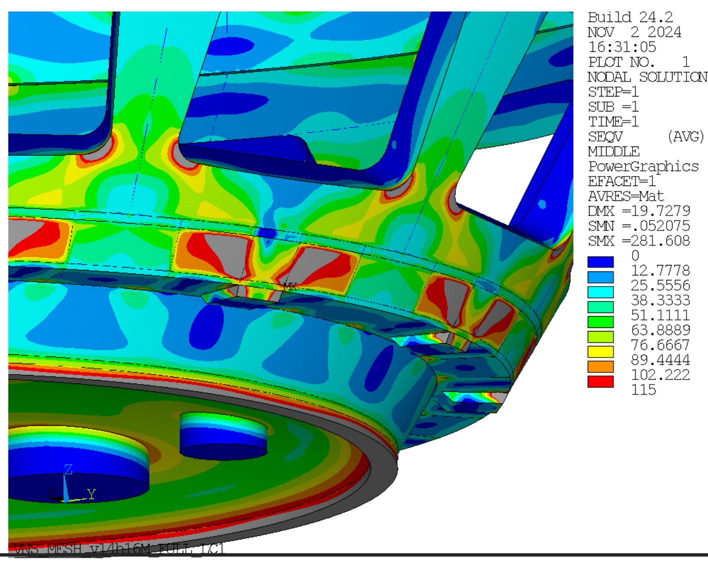




Von Mises stress (Pm+Pb) [MPa]
Load case 1: **Normal operation** (P + D)

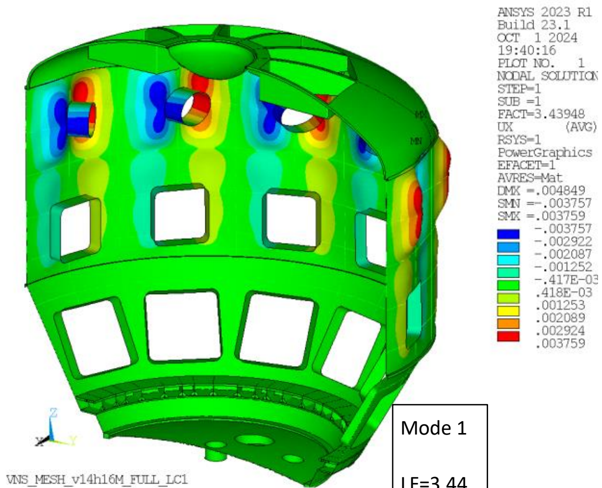
Von Mises membrane stress (Pm) [MPa]
Load case 1: **Normal operation** (P + D)





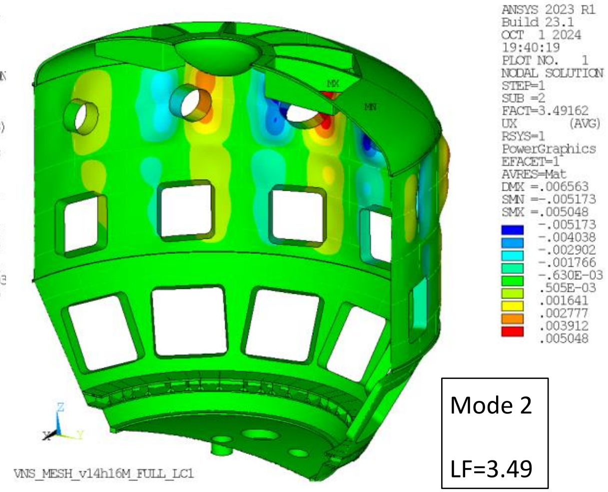
EUROfusion

Buckling modes 1-6 for Load case 1: Normal operation (P + D)



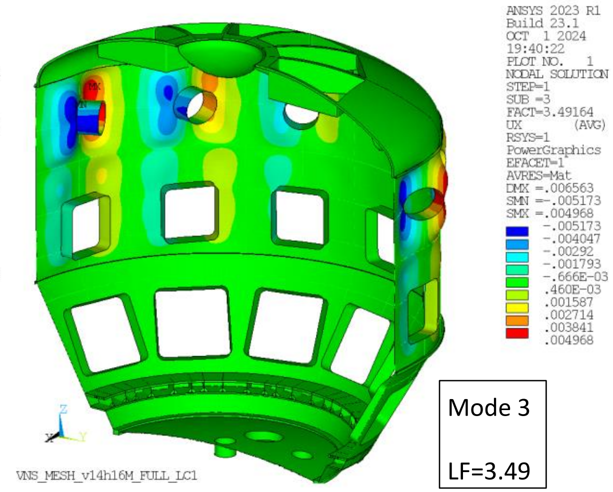
Mode 1

LF=3.44



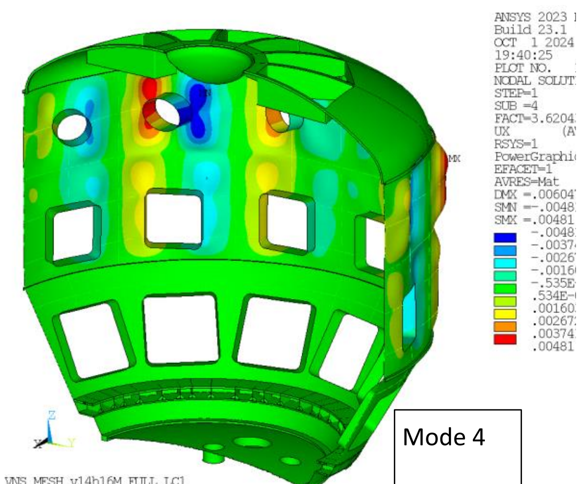
Mode 2

LF=3.49



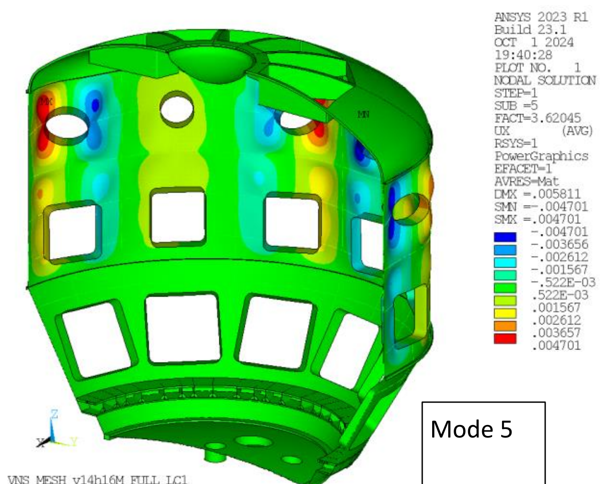
Mode 3

LF=3.49



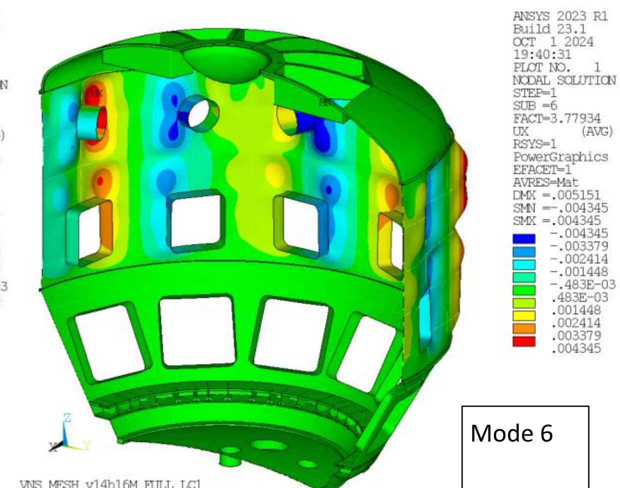
Mode 4

LF=3.62



Mode 5

LF=3.62



Mode 6

LF=3.78

Protection against Collapse from Buckling - Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)

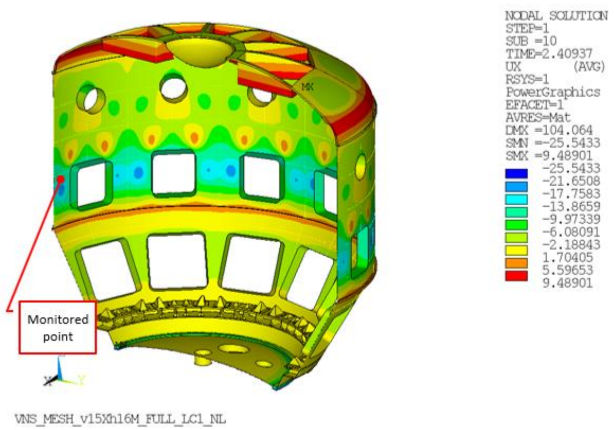
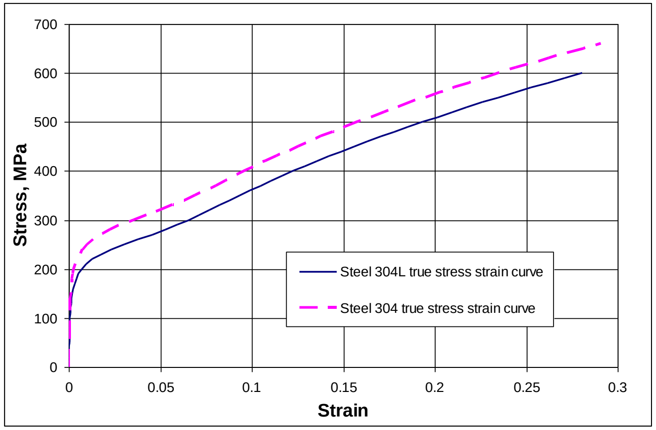


Figure 5-9 Radial displacements [mm] for **LF=2.41**- Final model: Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)



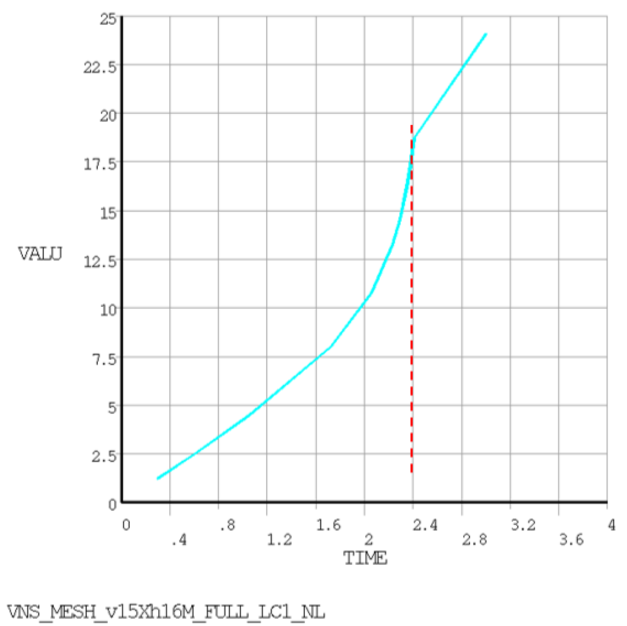
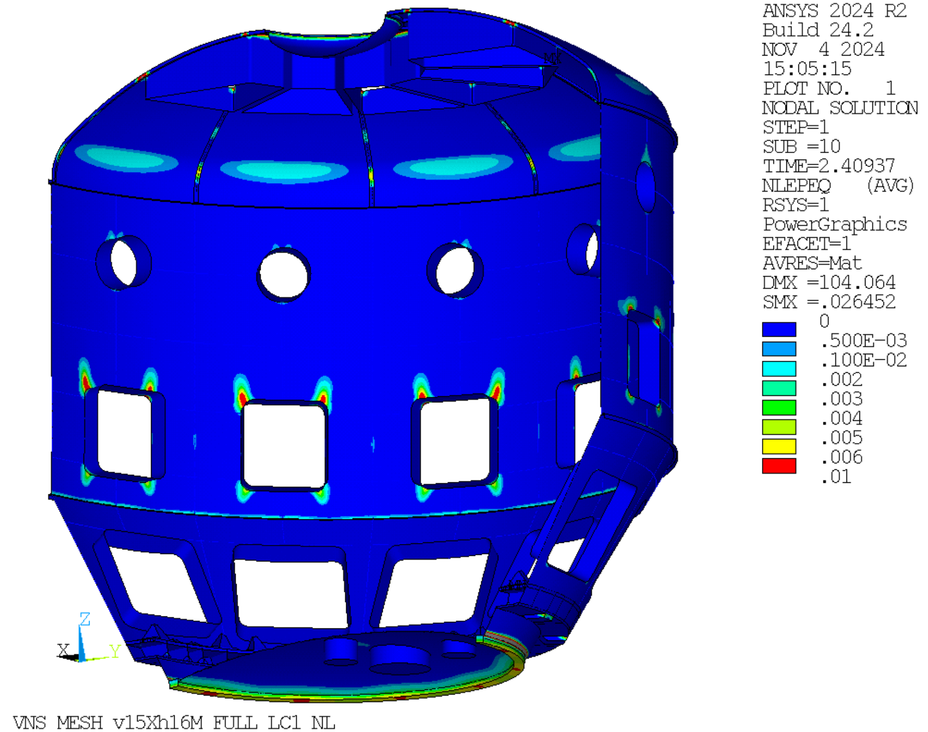


Figure 5-11 Radial displacement of the monitored point as a functions of the Load Factor - Final model - Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)



Accumulated Equivalent plastic strain for **LF=2.41**- Final model: Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)